

LATVIJAS LAUKSAIMNIECĪBAS UNIVERSITĀTE
TEHNISKĀ FAKULTĀTE
Lauksaimniecības enerģētikas institūts

A.Galiņš

Elektrozinību teorētiskie pamati

Elektrisko ķēžu aprēķini

Jelgava 2008

LATVIJAS LAUKSAIMNIECĪBAS UNIVERSITĀTE
TEHNISKĀ FAKULTĀTE
Lauksaimniecības enerģētikas institūts

A.Galiņš

Elektrozinību teorētiskie pamati

Elektrisko ķēžu aprēķini

Mācību – metodiskais līdzeklis

Jelgava 2008



Mācību līdzeklis sagatavots un izdots ESF projekta „Inženierzinātņu studiju satura modernizācija Latvijas Lauksaimniecības universitātē” ietvaros, projektu līdzfinansē Eiropas Savienība.

Galiņš A.. **Elektrozinību teorētiskie pamati:** Elektrisko ķēžu aprēķini. - Mācību līdzeklis – Jelgava: LLU, 2008. – 131 lpp.

Mācību līdzeklis veidots kā lekciju materiāls lauksaimniecības enerģētikas profesionālā bakalaura pamatstudiju priekšmetam „Elektrozinību teorētiskie pamati”. Teorētiskais materiāls satur elektrisko ķēžu aprēķinu piemērus, kas atvieglo kontroldarbu izpildi.

ISBN 978-9984-784-45-8

© Ainārs Galiņš

© LLU Tehniskā fakultāte

SATURS

SATURS	3
IEVADS.....	5
1. LINEĀRĀS LĪDZSTRĀVAS ĶĒDES	6
1.1. Vispārējie jautājumi.....	6
1.2. EDS avots un strāvas avots	7
1.3. Nesazarotas un sazarotas ķēdes	8
1.4. Spriegums ķēdes posmā.....	9
1.5. Oma likumi ķēdes posmam	9
1.6. Kirhofa likumi	10
1.7. Pretestību slēgumi.....	12
2. LĪDZSTRĀVAS ĶĒŽU APRĒĶINI.....	14
2.1. Kirhofa likumi vienādojumu sastādīšanā.....	14
2.2. Shēmas punkta saņemšana.....	15
2.3. Potenciālu diagramma.....	16
2.4. Enerģētiskais balanss	16
2.5. Proporcionālu lielumu metode	17
2.6. Kontūrstrāvu metode.....	18
2.7. Vienādojumu sistēmas aprēķins	20
2.8. Superpozīcijas metode	21
2.9. Kompensācijas teorēma	25
2.10. Paralelu zaru aizstāšana ar ekvivalentu zaru	27
2.11. Divu mezglu metode	29
2.12. Mezglu potenciālu metode	30
2.13. Zvaigznes un trīsstūra slēgumu pārveidošana	34
2.14. Enerģijas pārvadīšana pa līniju.....	37
3. VIENFĀZES MAIŅSTRĀVAS ĶĒDES	38
3.1. Sinusoidāla strāva un to raksturojošie lielumi.....	38
3.2. Sinusoidālas strāvas vidējā un efektīvā vērtība	39
3.3. Amplitūdas un formas koeficienti	41
3.4. Kompleksā plakne	41
3.5. Kompleksā amplitūda	44
3.6. Sinusoidālu funkciju saskaitīšana.....	45
3.7. Momentānā jauda.....	46
3.8. Sinusoidālā strāva aktīvajā pretestībā	46
3.9. Induktivitāte sinusoidālas strāvas ķēdē.....	47
3.10. Kondensators sinusoidālas strāvas ķēdē	49
3.11. Simboliskā metode.....	51
3.12. Kompleksā pretestība, Oma likums	54
3.13. Kompleksā vadītspēja	55
3.14. Pretestību un vadītspēju trīsstūris	55
3.15. Kirhofa likumi simboliskajā formā.....	57
3.16. Vektoru diagrammu izmantošana	58
3.17. Potenciālu starpības attēlošana kompleksajā plaknē	66
3.18. Aktīvā un reaktīvā un pilnā jauda.....	69

3.19. Divpols maiņstrāvas ķēdē.....	71
3.20. Strāvas rezonanse.....	72
3.21. Fāzu nobīdes kompensācija.....	74
3.22. Sprieguma rezonanse	76
3.23. RLC virknes slēguma darbības pētījumi	78
3.24. Virknes slēgums magnētiski saistītām spolēm.....	79
3.25. Mijinduktivitātes M noteikšana	82
3.26. Transformators bez serdes.....	83
3.27. Aktīvās un reaktīvās jaudas balanss.....	84
4. TRĪSFĀŽU MAIŅSTRĀVAS ĶĒDES	85
4.1. Trīsfāžu barošanas avots	85
4.2. Trīsfāžu ķēde un slēgumi	87
4.3. Trīsfāžu sistēmas spriegumi un strāvas.....	88
4.4. Sistēma zvaigzne - zvaigzne ar neitrāles vadu	91
4.5. Sistēma trīsstūris - trīsstūris	94
4.6. Trīsfāžu sistēmas operators a	96
4.7. Slēgums zvaigzne - zvaigzne bez neitrāles vada	97
4.8. Aktīvā, reaktīvā, pilnā trīsfāžu sistēmas jauda	99
4.9. Aktīvās trīsfāžu sistēmas jaudas noteikšana.....	100
4.10. Fāžu secības indikators	103
5. MAIŅSTRĀVAS ĶĒŽU APRĒĶINI	104
5.1. Vienfāzes sinusoidālas strāvas ķēžu aprēķini.....	104
5.1.1. Virknes slēguma aprēķins.....	104
5.1.2. Paralēlā slēguma aprēķins	108
5.1.3. Jaukta slēguma aprēķins.....	110
5.2. Trīsfāžu ķēžu aprēķini.....	114
5.2.1. Trīsfāžu zvaigznes slēgums ar neitrāles vadu.....	114
5.2.2. Trīsfāžu zvaigznes slēgums bez neitrāles vada	118
5.2.3. Trīsfāžu trīsstūra slēgums.....	122
5.3. Kompleksie skaitļi elektrisko ķēžu aprēķinos	126
5.3.1. Kompleksais skaitlis	126
5.3.2. Komplekso skaitļu saskaitīšana un atņemšana	127
5.3.3. Komplekso skaitļu reizināšana un dalīšana.....	128
5.3.4. Komplekso skaitļu aprēķins ar kalkulatoru	129
IZMANTOTĀ LITERATŪRA.....	131

IEVADS

Elektrisko ķēžu inženiertehniskie aprēķini ir viena no svarīgākajām elektrozinību sastāvdaļām, uz kuras bāzējās visi elektrotehniskie priekšmeti.

Mācību līdzeklis veidots kā lekciju materiāls LLU lauksaimniecības enerģētikas profesionālā bakalaura studiju priekšmeta „Elektrozinību teorētiskie pamati” elektrisko ķēžu aprēķinu daļas apguvei. Mācību līdzeklis būs īpaši noderīgs nepilna laika studentiem, jo teorētiskais materiāls satur elektrisko ķēžu aprēķinu piemērus, kas atvieglos kontroldarbu patstāvīgu izpildi.

Pirmajā nodaļā veltīta lineārajām līdzstrāvas ķēdēm, apskatītas galvenās definīcijas, Oma un Kirhofa likumi, paralēlu un virknē slēgtu pretestību summēšana.

Otrā nodaļā apskatītas līdzstrāvas ķēžu aprēķinu metodes, proporcionālu lielumu metode, kontūrstrāvu, superpozīcijas, divu mezglu, mezglu potenciālu metode, zvaigznes, trīsstūra slēgumu pārveidošana. Šai nodaļā ir parādīti arī uzdevumu risināšanas algoritmi.

Trešajā nodaļā apskatīti sinusoidālu maiņstrāvu raksturojošie lielumi, aktīvo, induktīvo un kapacitatīvo pretestību barība maiņstrāvas ķēdēs. Kompleksā plakne, komplekso lielumu izmantošana maiņstrāvas apzīmēšanai, simboliskā metode ķēžu aprēķinos, vektoru diagrammu pielietojums spriegumu un strāvu interpretācijā un aprēķinos. Dažāda slēguma shēmu aprēķini un darbības analīze.

Ceturtā nodaļā veltīta trīsfāžu sistēmas uzbūvei, slēgumu veidiem un sakarībām uz kurām balstās trīsfāžu ķēžu aprēķini, jaudas aprēķini, nesimetrisku slodžu vektoru diagrammas.

Piektā nodaļā doti piemēri un praktiski padomi maiņstrāvas ķēžu aprēķiniem, parādīti uzdevumu risināšanas algoritmi ar dažādām rēķināšanas metodēm. Analītisko aprēķinu rezultāti tiek pārbaudīti ar vektoru diagrammām. Īpaša uzmanība veltīta komplekso skaitļu aprēķiniem, doti piemēri matemātiskajām darbībām ar kompleksajiem skaitļiem, apskatīta iespēja komplekso skaitļu aprēķinos praktiski izmantot inženier un zinātniskos kalkulatorus.

Autors izsaka pateicību LLU Lauksaimniecības enerģētikas institūta kolēģiem par vērtīgajiem padomiem un ierosinājumiem mācību līdzekļa tapšanas gaitā.

1. LINEĀRĀS LĪDZSTRĀVAS ĶĒDES

1.1. Vispārējie jautājumi

Elektriskā ķēde - savstarpēji savienotu elektriskās enerģijas avotu un patērētāju sistēma.

Līdzstrāva – elektriskā strāva, kas nemainās laikā. Tā ir elektriskās enerģijas nesēju sakārtota plūsma.

Enerģijas nesēji: metālā - brīvie elektroni, šķīdumā - joni, anjoni un katjoni. Elektrisko lādiņu sakārtoto plūsmu rada *elektriskais lauks*, kuru rada enerģijas avots.

Enerģijas avots:

- ķīmisko enerģiju pārvērš elektriskajā;
- mehānisko enerģiju pārvērš elektriskajā;
- termisko enerģiju pārvērš elektriskajā;
- gaismas enerģiju pārvērš elektriskajā;
- citu veidu enerģiju pārvērš elektriskajā.

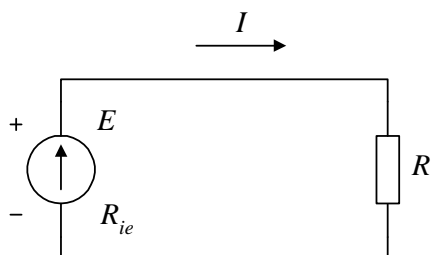
Enerģijas avotu raksturo - elektrodzinējspēks **EDS**, tā virziens un iekšējā pretestība R_{ie} .

Līdzstrāvu apzīmē ar burtu **I** un mēra ampēros, A.

EDS apzīmē ar burtu **E** un mēra voltos, V.

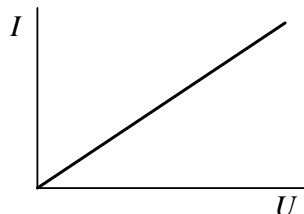
Pretestību apzīmē ar burtu **R** un mēra omos, Ω .

Shēma - sistēma, kas sastāv no barošanas avota **E**, vadiem un patērētāja **R**, skatīt 1.1. attēlu. Tehnikā un fizikā *pieņemts*, ka strāva plūst no (+) uz (-). Reāli plūst elektroni, no (-) uz (+).



1.1.att. Shēma

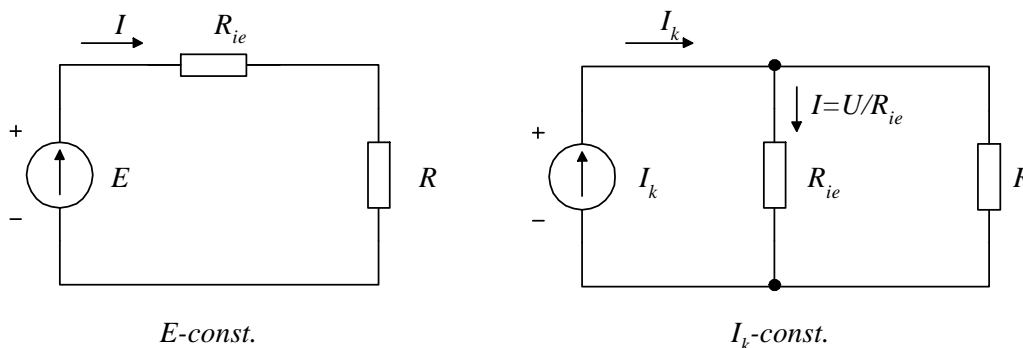
Voltampērraksturlīkne - strāvas funkcijas atkarībā no sprieguma izmaiņas $I=f(U)$ grafisks attēlojums (1.2. att.). Lineārai ķēdei voltampērraksturlīkne ir taisne. **Ja voltampērraksturlīkne nav taisne, tad ķēde ir nelineāra.**



1.2. att. Lineāras ķēdes voltampērraksturlīkne

1.2. EDS avots un strāvas avots

Ar **EDS avotu** saprot *idealizētu* barošanas avotu, kuram **EDS ir konstants** un nav atkarīgs no caurplūstošās strāvas, iekšējā pretestība ideālam EDS avotam ir $R_{ie}=0$.



1.3. att. EDS un I_k avotu ekvivalentā shēma

Reālajā dzīvē ideālu avotu nav. Katram EDS avotam ir iekšējā pretestība R_{ie} (1.3.att.), kas nav vienāda ar 0. Praktiskajos aprēķinos parasti jāievērtē R_{ie} .

Strāvas avots - tas ir *idealizēts* barošanas avots, kurš dod strāvu I_k (*const.*), neatkarīgu no slodzes pretestības R un I_k un ir reāla avota **EDS** un R_{ie} attiecība.

$$I_k = \frac{E}{R_{ie}} \quad (1.1)$$

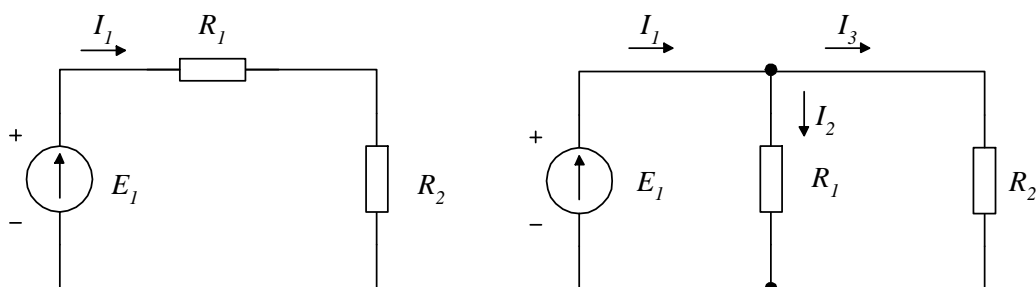
Teorētiski, lai nodrošinātu nemainīgu I_k , EDS un R_{ie} vērtībai vajadzētu tiekties uz bezgalību, $R_{ie} \rightarrow \infty$.

Strāva abās iepriekš apskatītajās ekvivalentajās shēmās 1.3.attēlā ir vienāda ar,

$$I = \frac{E}{R + R_{ie}} \quad (1.2)$$

1.3. Nesazarotas un sazarotas ķēdes

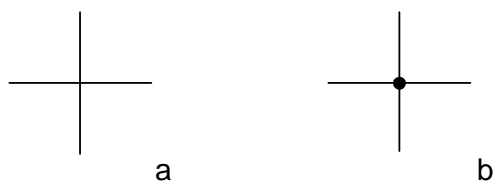
Nesazarotā ķēdē - plūst viena strāva, *sazarotā* – sadalās (1.4. att.).



1.4. att. **Nesazarota un sazarota ķēde**

Mezglu punkti - savienojuma punkti, kuros savienoti trīs vai vairāki (vadi) zari. Sazarotajā ķēdē, 1.4. attēlā, ir divi mezglu punkti, kuros savienoti trīs zari.

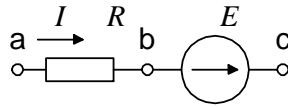
Mezglu punktu shēmā vienmēr apzīmē ar **punktu**, ja punktu nelieto, tad shematiski parādītās līnijas ir vadu šķērsošanās, skatīt 1.5.attēlu.



1.5. att. **Vadu šķērsošanās (a) un mezgla punkts (b).**

1.4. Spriegums ķēdes posmā

Spriegums - potenciālu starpība.



1.6. att. Ķēdes posms

Ķēdes posmā (1.6.att.), plūst strāva no augstākā potenciāla uz zemāko, no $\varphi_a \rightarrow \varphi_b$

$$\varphi_a = \varphi_b + IR \quad (1.3)$$

no tā redzam, ka

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \quad (1.4)$$

Tātad:

$$U_{ab} = IR \quad (1.5)$$

Tas ir *spriegums*, to var saukt arī par *sprieguma kritumu* uz pretestības R .

Ja ķēde satur *EDS* avotu, tad

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c \quad (1.6.)$$

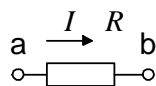
var noteikt φ_b potenciālu izejot no punkta „c”, ejot uz punktu „b” pretī *EDS* avota virzienam. Tas nozīmē, ka potenciāls punktā „b” ir mazāks (zemāks) nekā punktā „c”.

$$\varphi_b = \varphi_c - E \quad (1.7)$$

1.5. Oma likumi ķēdes posmam

Oma likums ķēdes posmam, kas nesatur *EDS* avotu

Sprieguma kritums uz pretestības R ir tieši proporcionāls pretestības R un caur to plūstošās strāvas I reizinājumam.



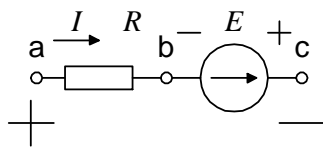
1.7. att. Ķēdes posms, kas nesatur *EDS*

$$U_{ab} = IR \quad (1.8)$$

Strāva caur pretestību R ir tieši proporcionāla sprieguma kritumam U_{ab} un apgriesti proporcionāla pretestībai R .

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R} \quad (1.9)$$

Oma likums ķēdes posmam, kas satur EDS avotu



1.8. att. **Ķēdes posms, kas satur EDS avotu**

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E}{R} = \frac{U_{ac} + E}{R} \quad (1.10)$$

Ja *EDS* avots ir pretēji vērsts strāvas I virzienam, tad

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E}{R} = \frac{U_{ac} - E}{R} \quad (1.11)$$

Vispārējā veidā Oma likumu ķēdes posmam, kas satur *EDS* avotu var uzrakstīt

$$I = \frac{U_{ac} \pm E}{R} = \frac{(\varphi_a - \varphi_c) \pm E}{R} \quad (1.12)$$

1.6. Kirhofa likumi

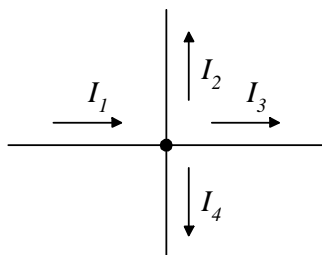
Ir *divi Kirhofa likumi* un ir noformulēti divos veidos, a un b.

Pirmais Kirhofa likums

a) Shēmas mezglā plūstošo strāvu summa ir vienāda ar 0.

Ja pieņemam, ka pienākošā strāva ir pozitīva „+”, bet aizplūstošā negatīva „-” tad,

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (1.13)$$



1.9. att. Mezgla punkts ar pienākošajām un aizejošajām strāvām

b) Shēmas mezglā pienākošo strāvu summa ir vienāda ar aizplūstošo strāvu summu.

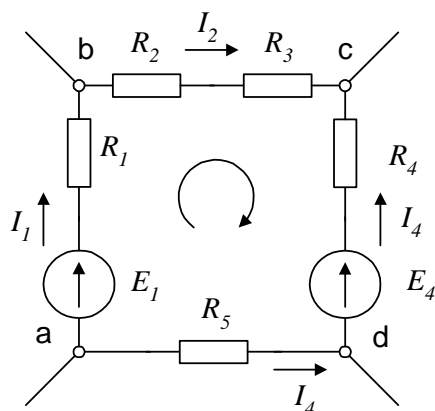
$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 \quad (1.14)$$

Tātad, fizikāli pirmais Kirhofa likums nozīmē, ka lādiņu kustība ķēdē notiek vienmērīgi un nekur nav to uzkrāšanās.

Otrais Kirhofa likums

a) *Sprieguma krituma summa* jebkurā noslēgtā kontūrā ir vienāda ar *EDS algebrisko summu* šajā kontūrā.

$$\sum IR = \sum E \quad (1.15)$$



1.10.att. Noslēgts ķēdes kontūrs

Summējot tiek ievērots *EDS* virziens, zīmi „+” vai „-“ nosaka pēc tā, vai *EDS* virziens sakrīt, vai nesakrīt ar kontūra pozitīvo apsekošanas virzienu. Par pozitīvo apsekošanas virzienu parasti pieņem pulksteņa rādītāja virzienu (1.10.att.).

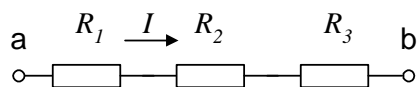
$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_2 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = E_1 - E_4$$

b) *Spriegumu* (nevis sprieguma krituma) algebriskā summa noslēgtā kontūrā vienāda ar nulli.

$$\sum U_k = 0 \quad (1.16)$$

1.7. Pretestību slēgumi

Virknēs slēgums



1.11.att. **Pretestību virknēs slēgums**

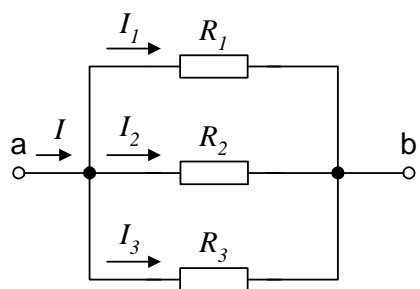
Virknēs slēgumam, kopējā pretestība ir pretestību aritmētiskā summa.

$$R_{123} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (1.17)$$

Jaudu var aprēķināt katrai pretestībai atsevišķi, to summējot iegūst kopējo slēguma jaudu,

$$P = I^2 R_1 + I^2 R_2 + I^2 R_3 = I^2 (R_1 + R_2 + R_3) \quad (1.18)$$

Paralēlais slēgums



1.12.att. **Pretestību paralēlais slēgums**

Paralēlajam pretestību slēgumam aritmētiski summē vadītspējas,

$$g_{123} = g_1 + g_2 + g_3 \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (1.20)$$

Kopējā pretestība paralēlajam slēgumam,

$$R_{123} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}. \quad (1.21)$$

Divu paralēlu pretestību summēšanai var izmantot arī šādas sakarības,

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{123} = \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3}. \quad (1.22)$$

Jaudu var aprēķināt katrai pretestībai atsevišķi, tās summējot, iegūst kopējo slēguma jaudu,

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = I^2 R_{123}. \quad (1.23)$$

2. LĪDZSTRĀVAS ĶĒŽU APRĒĶINI

2.1. Kirhofa likumi vienādojumu sastādīšanā

Kirhofa likumus var izmantot ķēdes zaru strāvu aprēķināšanai. Tā kā katrā ķēdes zarā plūst sava strāva, tad nezināmo strāvu skaits atbilst ķēdes zaru skaitam.

Lai varētu sastādīt vienādojumus ir :

Brīvi jāizvēlas pozitīvais strāvas virziens zaros un jāapzīmē shēmā.

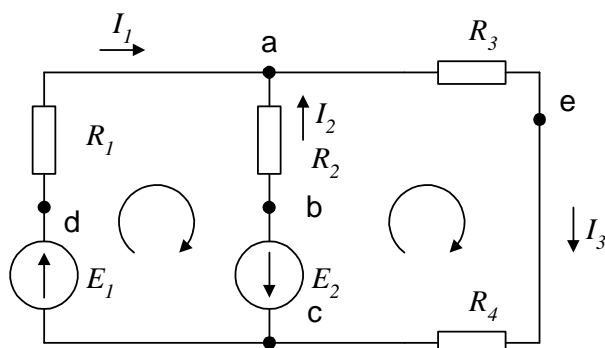
Jāizvēlas pozitīvais kontūru apsekošanas virziens, lai varētu pēc otrā Kirhofa likuma sastādīt vienādojumus. Vienkāršības labad ieteicams kontūru apsekošanas virzienu izvēlēties vienādu visiem kontūriem, piemēram - *pulksteņa rādītāja virzienu*.

Apzīmēsim zaru skaitu shēmā ar burtu - z un mezglu skaitu ar burtu - m . Lai iegūtu neatkarīgus vienādojumus, *pēc pirmā Kirhofa* likuma *satāda* ($m - 1$) vienādojumus.

Pēc otrā Kirhofa likuma satāda tik daudz vienādojumu, cik ir zaru, atskaitot tos vienādojumus, kas ir jau sastādīti pēc pirmā Kirhofa likuma: $z - (m - 1)$.

Sastādot vienādojumus pēc otrā Kirhofa likuma, jāseko, lai būtu ietverti visi shēmas zari. Pēc otrā Kirhofa likuma cenšas sastādīt vienādojumus *neatkarīgajiem zariem*.

Piemērs



Noteikt strāvas shēmas zarus.

Dots: $E_1=3,5V$;

$E_2=2,9V$; $R_1=1\Omega$;

$R_2=5\Omega$; $R_3=2\Omega$; $R_4=3\Omega$.

2.1. att.

Brīvi izvēlamies strāvu pozitīvo virzienu ķēdes zaros (2.1.att.). Shēmā ir 2 mezgli. Tātad pēc 1. Kirhofa likuma var sastādīt tikai vienu vienādojumu:

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

Ir redzams, ka otram mezglam būs līdzīgs vienādojums.

Pēc otrā Kirhofa likuma var sastādīt divus vienādojumus,

$$z - (m - 1) = 3 - (2 - 1) = 2.$$

Pieņemam, ka *pozitīvais shēmas kontūru apsekošanas virziens pa pulksteni.*

Kontūram $R_1 E_1 R_2 E_2$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2.$$

Zīme „+” pirms $I_1 R_1$ ņemta tāpēc, ka strāvas I_1 virziens sakrīt ar apsekošanas virzienu.

Zīme „-“ pirms $I_2 R_2$ ir tāpēc, ka I_2 virziens ir pretējs kontūra apsekošanas virzienam.

Kontūram $R_2 E_2 R_3 R_4$

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2.$$

Tālāk ir matemātika. Jāaprēķina strāvu vērtības. Tā kā strāvu virzieni ir izvēlēti brīvi, tad aprēķinos var parādīties strāvas vērtība ar „-“ zīmi, tas nozīmē, ka strāva reāli plūdis pretēji mūsu izvēlēto bultiņu virzienam.

2.2. Shēmas punkta sazemēšana

Sazemējot vienu shēmas punktu, strāvu sadalījums shēmā nemainās. Jauni zari neveidojas.

Ja sazemē divus punktus, veidojas papildus zari un shēma kļūst citādāka, strāvu sadalījums izmainās.

2.3. Potenciālu diagramma

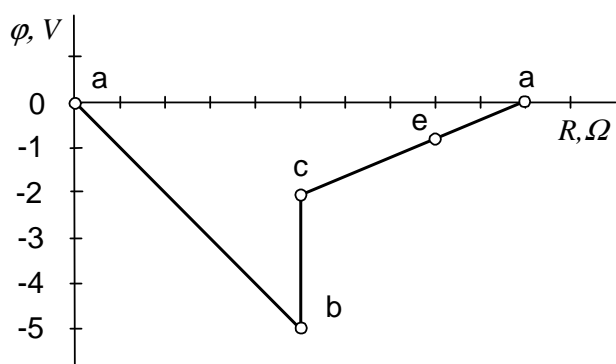
Kontūram var uzzīmēt potenciālu diagrammu. Katram kontūra punktam atbilst savs potenciāls. To var attēlot kā funkciju $\varphi = f(R)$.

Apskatīsim potenciālu diagrammu 2.1. attēlā parādītajai shēmai, kontūram $R_2 E_2 R_3 R_4$.

$$\varphi_b = \varphi_a + I_2 R_2 = \dots$$

$$\varphi_c = \varphi_b + E_2 = \dots$$

$$\varphi_e = \varphi_c + I_3 R_4 = \dots$$



2.2. att. Potenciālu diagramma

2.4. Enerģētiskais balanss

Strāvai plūstot caur pretestību izdalās siltums. Darbojas enerģijas nezūdamības likums. Ja caur *EDS* avotu plūst strāva, kuras virziens *sakrīt* ar *EDS* virzienu, *EDS* avots **atdod jaudu**, jeb precīzāk enerģiju laika vienībā.

Ja strāva caur *EDS* avotu vērsta *pretēji* *EDS* virzienam, *EDS* avots patērē enerģiju, **uzlādējas** (piemēram, akumulators) un enerģijas balansa vienādojumā *EDS* avotu apzīmē ar “-*E*”.

Enerģijas balansa vienādojumu shēmai ar *EDS* avotiem raksta,

$$\sum I^2 R = \sum EI \tag{2.1}$$

Ja shēma satur *EDS avotus* un *strāvas avotus* tad,

$$\Sigma I^2 R = \Sigma EI + \Sigma U_{ab} I_k \quad (2.2)$$

kur: EI – ir *EDS avota* atdotā jauda;

$U_{ab} I_k$ - *strāvas avota* atdotā jauda.

Tālāk iepazīsimies ar racionālākajām shēmu aprēķina metodēm, kuras pamatojas uz Kirhofa likumiem.

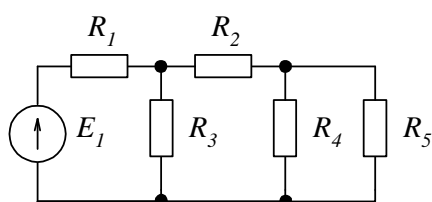
2.5. Proporcionālu lielumu metode

Vai vienkārši, proporcionalitātes metode.

Aprēķinu metodes būtība ir sekojoša:

- Vistālākajā no *EDS avota* izvietotajā zarā **brīvi** pieņemam kādu strāvas vērtību, piemēram, $1A$.
- Pārvietojoties no shēmas beigām uz sākumu, nosakām strāvu un spriegumu pārējos zaros. Rezultātā iegūstam spriegumu un strāvu vērtības zaros, pie nosacījuma, **ka tālākajā zarā plūst strāva $1A$** .
- Tā kā aprēķina rezultātā iegūtā sprieguma vērtība shēmas sākumā nebūs vienāda ar *EDS avota* E vērtību, tad jāizrēķina *proporcionalitātes koeficients* k , kas parāda, cik reizes atšķirās mūsu aprēķinātais spriegums no reāli pieslēgtā *EDS*.
- Ar šo proporcionalitātes koeficientu k pareizina iepriekš nosacīti aprēķinātās sprieguma un strāvas vērtības. Rezultātā iegūst **reālās vērtības**.

Piemērs



2.3. att.

Aprēķināt strāvas zaros.

Dots: $R_1=3\Omega$; $R_2=3\Omega$; $R_3=13\Omega$; $R_4=2\Omega$;

$R_5=4\Omega$; $E_1=75V$.

Pieņemam, ka caur pretestību R_5 plūst strāva $I_5=1A$ un rēķinām, U_5, I_4, I_2, U_2 utt.

$$U_5 = I_5 R_5; \quad I_4 = \frac{U_5}{R_4}; \quad I_2 = I_4 + I_5; \quad U_2 = I_2 R_2; \quad U_3 = U_5 + U_2;$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3}; \quad I_1 = I_2 + I_3; \quad U_1 = I_1 R_1; \quad U = U_3 + U_1; \quad k = \frac{E_1}{U};$$

$$I'_1 = I_1 \cdot k; \quad I'_2 = I_2 \cdot k; \quad I'_3 = I_3 \cdot k; \quad I'_4 = I_4 \cdot k; \quad I'_5 = I_5 \cdot k$$

Proporcionālu lielumu aprēķinu metode ir lietojama ja shēmā ir viens *EDS* avots un zari sastāv no paralēli un virknē slēgtām pretestībām.

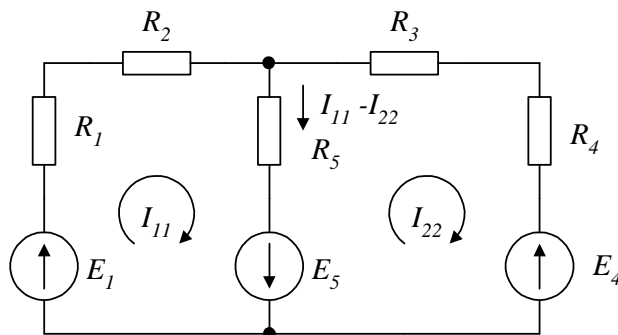
Šo metodi var lietot kopā ar citām aprēķinu metodēm.

2.6. Kontūrstrāvu metode

Rēķinot pieņem, ka katrā neatkarīgā kontūrā plūst sava kontūra strāva. Vienādojumus sastāda kontūra strāvām. Pēc to atrašanas, nosaka zaru strāvu ar kontūrstrāvu palīdzību.

Tātad ar kontūrstrāvu metodi nosaka kontūru strāvas un no tām zaru strāvas. Nezināmo skaits šajā metodē ir vienāds ar vienādojumu skaitu, kuru vajadzētu sastādīt pēc otrā Kirhofa likuma.

Piemērs



2.4. att.

1. Dotajā shēmā (2.4.att.) ir divi neatkarīgi kontūri.
2. Pieņemam, ka vienā kontūrā plūst strāva I_{11} , otrā I_{22} .

3. Pēc otrā Kirhofa likuma jā sastāda divus vienādojumus.
4. Pieņemam, ka kopējā zarā $R_5 E_5$ no augšas uz leju plūst strāva ($I_{11} - I_{22}$).
5. Pozitīvais kontūra apsekošanas virziens pulksteņa rādītāja virzienā.

Pirmais kontūrs $R_1 R_2 R_5 E_1 E_5$, pēc otrā Kirhofa likuma rakstām vienādojumu,

$$I_{11}(R_1 + R_2) + (I_{11} - I_{22})R_5 = E_1 + E_5$$

to var pārrakstīt:

$$I_{11}(R_1 + R_2 + R_5) + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5$$

Otrais kontūrs $R_3 R_4 R_5 E_4 E_5$, pēc otrā Kirhofa likuma rakstām vienādojumu,

$$-(I_{11} - I_{22})R_5 + I_{22}(R_3 + R_4) = -E_5 - E_4$$

to var pārrakstīt:

$$(-R_5)I_{11} + I_{22}(R_3 + R_4 + R_5) = -E_4 - E_5$$

Varam pieņemt apzīmējumus:

pirmā kontūra pretestību summa $R_{11} = R_1 + R_2 + R_5,$

otrā kontūra pretestību summa $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5,$

starp kontūru zara pretestību summa ar „-“, zīmi $R_{12} = R_{21} = -R_5,$

pirmā kontūra EDS summa $E_{11} = E_1 + E_5,$

otrā kontūra EDS summa $E_{22} = -E_4 - E_5.$

Pirmā un otrā kontūra vienādojumos ievietojam $R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}, E_{11}, E_{22}$, varam rakstīt vienādojumu sistēmu,

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ar šādu vienādojumu sistēmu var aprēķināt jebkuru 2. kontūru shēmu.

Ja neatkarīgu kontūru skaits shēmā ir 3, tad jā atrisina šāda vienādojumu sistēma,

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{23} + I_{33}R_{33} \end{cases} \quad (2.4)$$

Tālāk jāaprēķina vienādojumu sistēma, rezultātā iegūst kontūrstrāvu vērtības, no tām var aprēķināt visu nepieciešamo.

2.7. Vienādojumu sistēmas aprēķins

Vienādojumu sistēmas var rēķināt ar dažādiem paņēmieniem. Elektrotehniskajos aprēķinos piemērotākais paņemiens ir izmantot Krāmera formulas un determinantu rēķinus. Ar šo metodi atrisināsim vienādojumu sistēmu,

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{23} + I_{33}R_{33} \end{cases}$$

Krāmera formulas

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (2.5)$$

Lai aprēķinātu strāvas I_{11} , I_{22} , I_{33} , ir jāizrēķina diskriminanti Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 un Δ . Jāatrisina četri determinanti,

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{12} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad (2.6) \quad (2.7)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{12} & E_{22} & R_{23} \\ R_{13} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{12} & R_{22} & E_{22} \\ R_{13} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad (2.8) \quad (2.9)$$

Viens no determinantu atrisināšanas paņēmieniem ir šāds,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = R_{11} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - R_{12} \cdot \begin{vmatrix} R_{21} & R_{23} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix} + R_{13} \cdot \begin{vmatrix} R_{21} & R_{22} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix} = \\ &= R_{11} \cdot (R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32}) - R_{12} \cdot (R_{21}R_{33} - R_{23}R_{31}) + \\ &+ R_{13} \cdot (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31}) \end{aligned}$$

2.8. Superpozīcijas metode

Superpozīcijas princips - strāva zarā ir vienāda ar atsevišķu *EDS* avotu radīto strāvu algebrisko summu (Метод наложения). Šis princips ir spēkā visām lineārām ķēdēm.

Superpozīcijas (pārklāšanās) aprēķinu metode

- Pēc kārtas aprēķina *EDS* avotu radīto strāvu, tos iedomāti izslēdzot no shēmas. *EDS* avotu vietā atstāj tikai viņu iekšējo pretestību.
- Pēc tam aprēķina zaru strāvas. To izdara algebriski summējot aprēķinātās strāvas komponentes.

Šo metodi nedrīkst lietot aprēķinot uz pretestībām izdalīto jaudu, nosakot jaudas komponentes un summējot. Tas tāpēc, ka jauda ir kvadrātiska funkcija:

$$P = RI^2.$$

Jaudas komponentes nevar vienkārši summēt!

Tātad, ja caur pretestību R plūdis divas strāvas komponentes I_1 un I_2 , tad uz šīs pretestības izdalīsies jauda:

$$P = R(I_1 + I_2)^2,$$

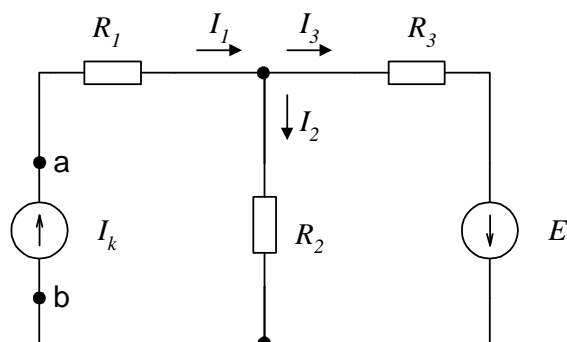
bet ne

$$P \neq RI_1^2 + RI_2^2.$$

Piemērs

Noteikt jaudu, ko dod strāvas avots I_k un EDS avots E .

Dots: $R_1=2\Omega$; $R_2=4\Omega$; $R_3=6\Omega$; $I_k=5A$; $E=20V$.



2.5. att.

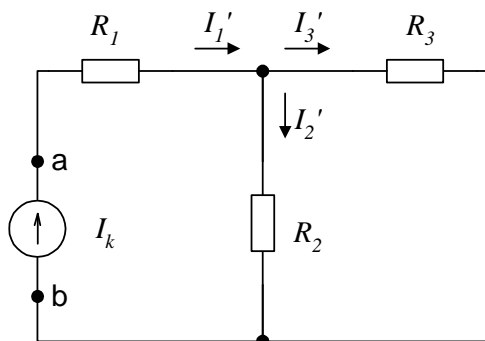
Dotajai shēmai (2.5.att.) visos zaros brīvi pieņemam un norādām strāvu virzienu, ja rezultātā, tas būs pretējs, to parādīs mīnusa „-” zīme.

Nosakām, kā strādā strāvas avots I_k . No shēmas nosacīti izslēdzam EDS avotu E , shēmā atstājam tikai EDS avota iekšējo pretestību $R_{ie}=0$. Iegūstam parciālo shēmu (2.6.att.), kurā strāvu virzienus norāda atbilstoši atstātā avota I_k darbības virzienam.

Strāva I_1' sakrīt ar strāvas avota I_k ģenerēto,

$$I_1' = I_k = 5A$$

Lai noteiktu strāvu I'_2 , jānoskaidro, kāds būs spriegums uz pretestībām, R_2, R_3 , kas ir slēgtas paralēli un caur kopējo ekvivalento pretestību R_{23} plūst strāva I'_1 .

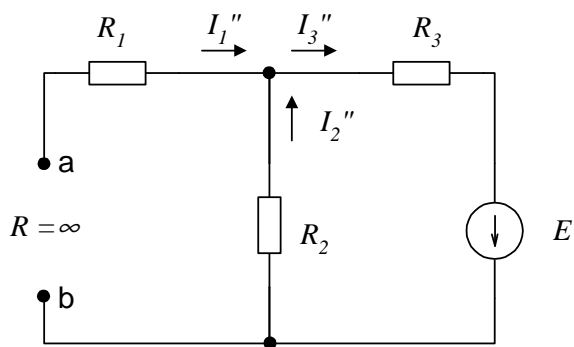


2.6. att.

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}; \quad U_{R_{23}} = I'_1 \cdot R_{23};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{U_{R_{23}}}{R_2}; \quad I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5 \frac{6}{4 + 6} = 3A$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2 = 5 - 3 = 2A$$



2.7. att.

Tā kā strāvas avota I_k iekšējā pretestība $R_{ie} = 0$, tad izslēdzot no shēmas strāvas avotu, viņa vietā ir ķēdes pārrāvums un strāva neplūst (2.7.att.). Parciālo strāvu I'_2, I'_3 virzienu ņemam atbilstoši EDS darbības virzienam.

Aprēķināsim *EDS* avota radīto strāvu,

$$I_1'' = 0$$

$$I_2'' = I_3'' = \frac{E}{R_2 + R_3} = 2A$$

Rezultējošās strāvas zaros iegūst algebriski summējot strāvas komponentes, ņemot vērā to virzienu, salīdzinot ar dotajā shēmā pieņemto, ja virziens sakrīt, strāvu summē ar „+” zīmi, ja nesakrīt, ar „-” zīmi.

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 5 + 0 = 5A$$

$$I_2 = I_2' - I_2'' = 3 - 2 = 1A$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4A$$

Spriegumu strāvas avotam I_k nosaka izmantojot otro Kirhoha likumu,

$$U_{ab} = R_1 I_1 + R_2 I_2 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 14A$$

Aprēķinām, kādu jaudu atdod strāvas avots I_k ,

$$P_1 = U_{ab} I_k = 14 \cdot 5 = 70W .$$

Aprēķinām *EDS* avota atdoto jaudu,

$$P_2 = EI_3 = 20 \cdot 4 = 80W .$$

Sastādām jaudas balansa vienādojumu,

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = U_{ab} I_k + EI_3 .$$

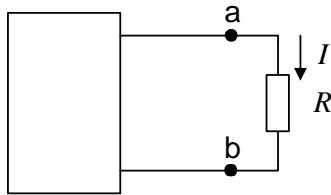
Ja tas atbilst, tad uzdevums atrisināts pareizi.

2.9. Kompensācijas teorēma

Jebkurā elektriskā ķēdē pretestību R var aizstāt ar EDS avotu E , kura skaitliskā vērtība ir vienāda ar sprieguma kritumu uz pretestības R un ir vērsts pretēji strāvai, kas plūst caur pretestību R .

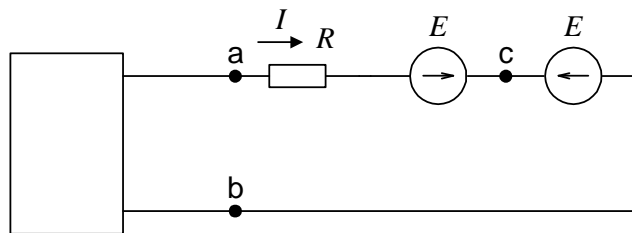
Pierādīsim šo teorēmu !

- Izdalīsim no shēmas vienu zaru ar pretestību R , kurā plūst strāva I .



2.8. att.

- Ja ķēdē ieslēgsim divus pretēji vērstus EDS avotus, kuru vērtība ir vienāda ar sprieguma kritumu rezistorā R , strāva I ķēdē nemainīsies.

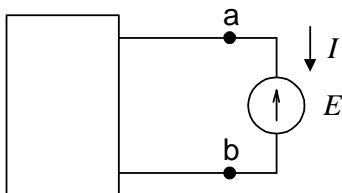


2.9. att.

- Varam pārlicināties, ka potenciālu starpība starp punktiem a un c būs vienāda ar 0.

$$\varphi_c = \varphi_a - IR + E = \varphi_a - IR + IR = \varphi_a .$$

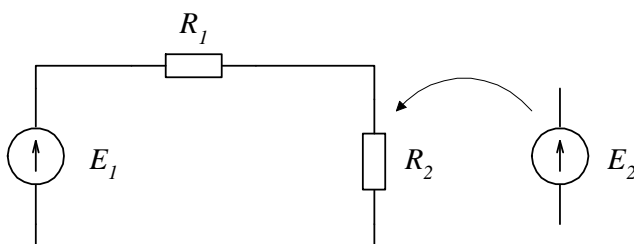
- Tā kā potenciāli punktos a un c ir vienādi, tos var apvienot vienā.



2.10. att.

Piemērs

Noteikt, kādai ir jābūt E_2 vērtībai, aizstājot R_2 ar E_2 .



2.11. att. **R aizstāšana ar EDS**

Shēmā strāva I nemainās.

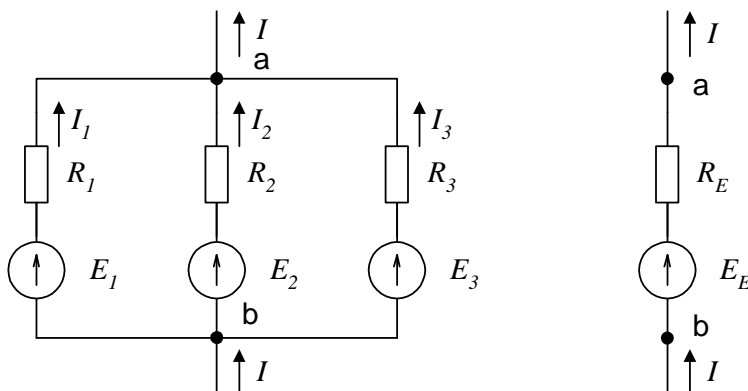
$$I = \frac{E_1}{R_1 + R_2};$$

$$E_2 = R_2 \frac{E_1}{R_1 + R_2};$$

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1}.$$

2.10. Paralēlu zaru aizstāšana ar ekvivalentu zaru

Lai vienkāršotu sarežģītu uzdevumu risināšanu, paralēlus shēmas zarus, kas satur *EDS* avotus, var aizstāt ar vienu ekvivalentu zaru. Ķēde ir ekvivalenta, ja caurplūstošā strāva *I* un spriegums uz spailēm a-b nemainās.



2.12. att. Paralēlu zaru aizstāšana ar ekvivalentu zaru

Izsakām zaru strāvas un uzrakstām strāvu vienādojumu,

$$I_1 + I_2 + I_3 = I$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab})g_1 \quad (2.10)$$

$$I_2 = (E_2 - U_{ab})g_2$$

$$I_n = (E_n - U_{ab})g_n$$

Summējot paralēlo zaru strāvas, iegūstam vienādojumu,

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n E_k g_k - U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k, \quad (2.11)$$

kur n - paralēlu zaru skaits.

Strāvas vienādojums ekvivalentajai shēmai,

$$I = E_E g_E - U_{ab} g_E, \quad (2.12)$$

No sakarībām (2.11) un (2.12) izsakām ekvivalento vadītspēju un ekvivalento EDS ,

ekvivalentā vadītspēja $g_E = \sum_{k=1}^n g_k, \quad g_E = \frac{1}{R_E}, \quad (2.13) (2.14)$

$$E_E g_E = \sum_{k=1}^n E_k g_k, \quad (2.15)$$

ekvivalentais EDS $E_E = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (2.16)$

Aprēķinos jāievēro

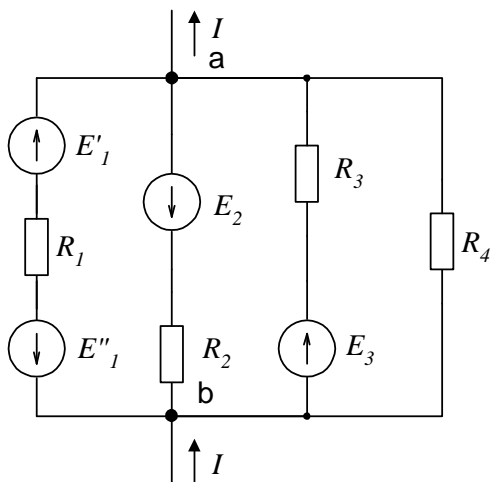
Ja shēmas zarā ir tikai pretestība R , bet nav EDS ($E=0$), tad summējot ņem vērā tikai attiecīgā zara vadītspēju g .

Strāvu virziens zaros vienāds un sakrīt ar ienākošās un izejošās strāvas virzienu.

Ja kāda EDS avota virziens pretējs strāvas virzienam, tad jāņem ar mīnusa „-” zīmi.

Aizstājot shēmu ar ekvivalentu slēgumu, tas nav ekvivalents pēc jaudas.

Piemērs



2.13. att.

Aizvietosim paralēlus zarus ar vienu ekvivalentu.

Dots: $E_1' = 10V; E_1'' = 30V; E_2 = 40V; E_3 = 60V; R_1 = 2\Omega; R_2 = 4\Omega; R_3 = 1\Omega; R_4 = 5\Omega.$

Nosakām vadītspējas $g_1 = 0,5S; g_2 = 0,2S; g_3 = 1S; g_4 = 0,2S; (S\text{-sīmens}).$

$$R_E = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 g_k} = \frac{1}{0.5 + 0.25 + 1 + 0.2} = 0.513\Omega$$

$$E_E = \frac{\sum_{k=1}^4 E_k g_k}{\sum g_k} = \frac{(10 - 30) \cdot 0.5 - 40 \cdot 0.25 + 60 \cdot 1}{1.95} = 20.5V.$$

2.11. Divu mezglu metode

Praksē bieži sastopamas shēmas, kuras satur tikai 2 mezglus. Šādu shēmu aprēķinos visracionālāk lietot *2 mezglu metodi*.

Ar *divu mezglu metodi* saprot - aprēķina metodi, kur par meklējamo (aprēķināmo) lielumu pieņem *spriegumu starp* šiem diviem mezglu punktiem.

Aprēķinu sakarības ir iepriekš apskatītās *zaru reducēšanas sakarības* (2.10):

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = (E_1 - U_{ab})g_1;$$

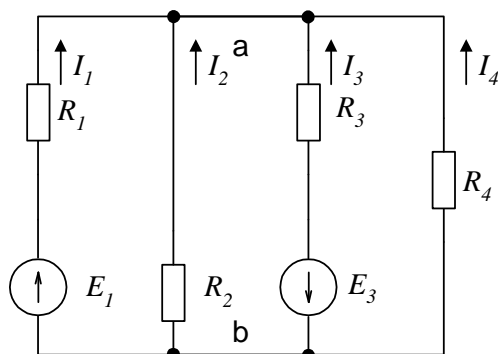
$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n E_k g_k - U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k .$$

Atšķirībā no iepriekš apskatītajiem reducēšanas aprēķiniem, ja pieņemam, ka $I=0$, no šiem vienādojumiem var atrast, ka:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k g_k}{\sum g_k} . \quad (2.17)$$

Strāvu jebkurā zarā pēc tam var aprēķināt pēc sakarības (2.10).

Piemērs



2.14. att.

Aprēķināt zaru strāvas.

Dots :

$$E_1=10V; \quad E_3=50V; \quad R_1=1\Omega;$$

$$R_2=5\Omega; \quad R_3=2\Omega; \quad R_4=4\Omega.$$

Nosakām vadītspējas $g_1=1S$;

$$g_2=0,2S; \quad g_3=0,5S; \quad g_4=0,25S$$

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4} = \frac{10 \cdot 1 - 50 \cdot 0,5}{1 + 0,2 + 0,5 + 0,25} = -7,69V;$$

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{10 - (-7,69)}{1} = 17,69A;$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab}}{R_2} = \frac{7,69}{5} = 1,54A; \quad I_4 = \frac{-U_{ab}}{R_4} = \frac{7,69}{4} = 1,93A;$$

$$I_3 = \frac{-E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{-50 - (-7,69)}{2} = -21,16A.$$

2.12. Mezglu potenciālu metode

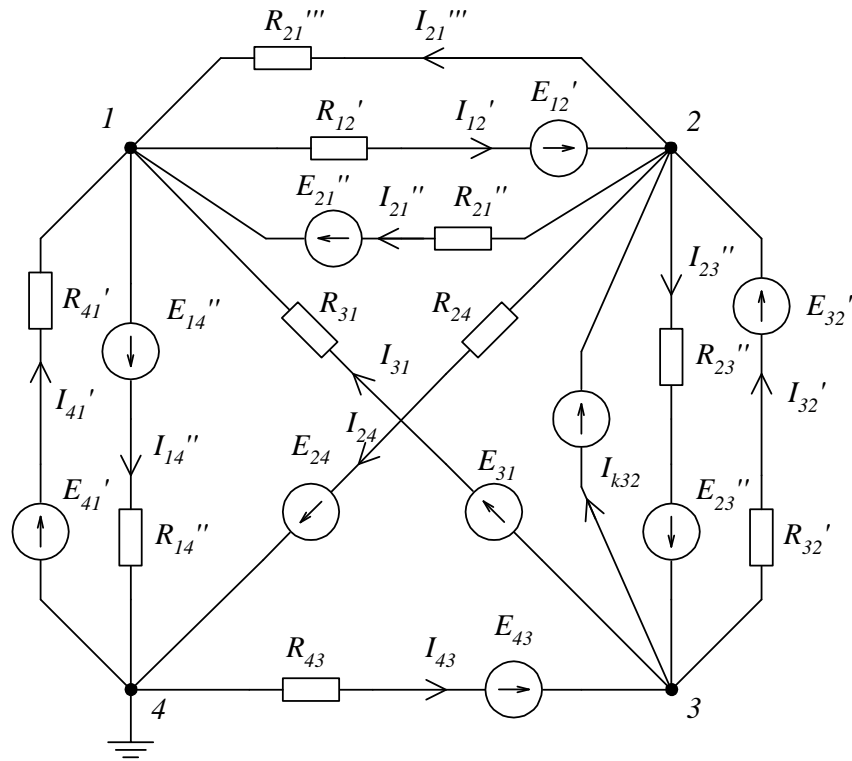
Ar mezglu potenciālu metodi aprēķina shēmas *mezglu potenciālus*.

Pēc Oma likuma ķēdes posmam, kas satur *EDS avotu* var noteikt strāvu jebkurā ķēdes zarā. Lai pielietotu Oma likumu ir jāzin shēmas mezglu potenciāli. Pieņemsim, ka shēmā ir “n” mezglu. Mēs varam vienu mezgla punktu sazēmēt, pieņemot tā potenciālu par “0”. Šai sakarā nezināmo skaits no n samazināsies uz (n - 1).

Nezināmo skaits izmantojot mezglu punktu potenciālu metodi ir vienāds ar vienādojumu skaitu, kas mums ir jāstāda pēc *pirmā Kirchofa likuma*.

Šī aprēķinu metode ir ekonomiskāka nekā kontūrstrāvu metode.

Apskatīsim vispārēju risināšnas variantu.



2.15. att.

Shēmai ir 11 zari un 4 mezglu punkti, brīvi uzliksim punktu numerāciju. Strāvas virzienam zaros jāsakrīt ar EDS virzienu. Strāvas, EDS un pretestības apzīmējumā lietosim indeksus, kas norāda no kura mezgla punkta, uz kuru tie vērsti.

Sazemējam ceturto mezglu punktu, tātad $\varphi_4 = 0$.

Jānosaka $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ mezglu punktu potenciāli.

Sastādām vienādojumus pēc pirmā Kirhofa likuma.

1. mezgla punktam

$$I'_{41} - I''_{14} + I'''_{21} - I'_{12} + I''_{21} + I_{31} = 0.$$

Izsakām strāvas ar Oma likumu un iegūstam vienādojumu,

$$\begin{aligned} & [E'_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)]g'_{41} - [E_{14} - (\varphi_4 - \varphi_1)]g''_{14} + [0 - (\varphi_1 - \varphi_2)]g'''_{21} - \\ & - [E'_{12} - (\varphi_2 - \varphi_1)]g'_{12} + [E_{21} - (\varphi_1 - \varphi_2)]g''_{21} + [E_{31} - (\varphi_1 - \varphi_3)]g_{31} = 0 \end{aligned}$$

Pēdējo vienādojumu pārrakstām vienādojumu sistēmas veidošanai derīgā formā.

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11}, \quad (2.17)$$

kur

$$G_{11} = g'_{41} + g_{31} + g''_{21} + g''_{14} + g'_{12} + g'''_{21};$$

$$G_{12} = -(g'_{12} + g'''_{21} + g''_{21});$$

$$G_{13} = -g_{31};$$

$$I_{11} = E'_{41} g'_{41} + E_{31} g_{31} + E''_{21} g'_{21} - E''_{14} g''_{14} - E'_{12} g'_{12}.$$

Apskatīsim (2.17) vienādojuma struktūru:

G_{11} ir visu 1. mezgla punktam pieguļošo zaru vadītspēju summa. G_{12} visu vadītspēju summa zariem, kas atrodas starp mezglu punktiem 1 un 2, ņemti ar mīnusa “-” zīmi. Līdzīgi, G_{13} vadītspēju summa zariem, kas atrodas starp mezglu punktiem 1 un 3, ņemti ar mīnusa “-” zīmi.

I_{11} sauc par nosacīto 1 mezgla punkta strāvu. Tas ir aprēķinu lielums un ir vienāds ar algebrisko strāvu summu, kas ir iegūtas zaru EDS dalot ar zaru pretestību. Šajā summā ar zīmi “+” ietilpst strāvas, kuru virziens ir vērsts uz punktu “1”, promejošajām strāvām liek mīnusa “-” zīmi.

Šādus vienādojumus raksta arī citiem punktiem un izveido sistēmu ar (n-1) vienādojumiem,

$$\begin{aligned} \varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} + \dots + \varphi_{n-1} G_{1,n-1} &= I_{11} \\ \varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} + \dots + \varphi_{n-1} G_{2,n-1} &= I_{22} \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ \varphi_1 G_{n-1,1} + \varphi_2 G_{n-1,2} + \dots + \varphi_{n-1} G_{n-1,n-1} &= I_{n-1,n-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ja starp mezglu punktiem nav zaru, tad atbilstošā vadītspēja $G=0$.

Atrisinā vienādojumu sistēmu, tad pēc Oma likuma aprēķina zaru strāvas.

Piemērs

Dotajam zīmējumam (2.15. att.), aprēķināt strāvas zaros.

Dots:

$$E_{41}'=10V; E_{14}''=6V; E_{12}'=20V; E_{21}''=30V; E_{31}=14V; E_{24}=10V; E_{43}=8V; E_{23}''=12V;$$

$$E_{32}'=7V; I_{k32}=1,5A;$$

$$R_{41}'=1\Omega; R_{14}''=2\Omega; R_{12}'=10\Omega; R_{21}''=10\Omega; R_{21}'''=5\Omega; R_{31}=2\Omega; R_{24}=4\Omega; R_{43}=2\Omega;$$

$$R_{23}''=4\Omega; R_{32}'=2\Omega;$$

Risinājums

Shēmai ir četri mezglu punkti, pieņemam, ka ceturtajam punktam ir 0 potenciāls $\varphi_4 = 0$. Pārējo potenciālu $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$ aprēķināšanai, rakstām trīs vienādojumu sistēmu,

$$\varphi_1 G_{11} + \varphi_2 G_{12} + \varphi_3 G_{13} = I_{11},$$

$$\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} + \varphi_3 G_{23} = I_{22},$$

$$\varphi_1 G_{31} + \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} = I_{33}.$$

Aprēķinām vadītspējas, mezglu punktiem pieguļošajos zaros,

$$G_{11} = \frac{1}{R_{41}'} + \frac{1}{R_{14}''} + \frac{1}{R_{12}'} + \frac{1}{R_{21}''} + \frac{1}{R_{21}'''} + \frac{1}{R_{31}} = 2.4S$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_{12}'} + \frac{1}{R_{21}''} + \frac{1}{R_{21}'''} + \frac{1}{R_{24}} + \frac{1}{R_{32}'} + \frac{1}{R_{23}''} = 1.4S$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_{32}'} + \frac{1}{R_{23}''} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{43}} = 1.75S$$

Aprēķinot G_{22} ; G_{33} un G_{23} ievērtēts, ka strāvas avota I_{k32} vadītspēja vienāda ar 0 ($R_{ie} \rightarrow \infty$).

Aprēķinām vadītspējas starp mezglu punktiem,

$$G_{12} = G_{21} = -(0.2 + 0.1 + 0.1) = -0.4S$$

$$G_{31} = G_{13} = -0.5S$$

$$G_{23} = G_{32} = -(0.25 + 0.5) = -0.75S$$

Aprēķinām mezglu strāvas,

$$I_{11} = \frac{E'_{41}}{R'_{41}} - \frac{E''_{14}}{R''_{14}} + \frac{E_{31}}{R_{31}} - \frac{E'_{12}}{R'_{12}} + \frac{E''_{21}}{R''_{12}} = 15A$$

$$I_{22} = \frac{E_{32}}{R'_{32}} - \frac{E''_{23}}{R''_{23}} + \frac{E'_{12}}{R'_{12}} - \frac{E''_{21}}{R''_{21}} - \frac{E_{24}}{R_{24}} + I_{k32} = -1.5A$$

$$I_{33} = -3.5 + 3 - 7 + 4 - 1.5 = -5A$$

Iegūstam vienādojuma sistēmu,

$$2,4\varphi_1 - 0,4\varphi_2 - 1,5\varphi_3 = 1,5$$

$$-0,4\varphi_1 + 1,4\varphi_2 - 0,75\varphi_3 = -1,5$$

$$-0,5\varphi_1 - 0,75\varphi_2 + 1,75\varphi_3 = -5$$

Risinām vienādojumu sistēmu, rēķinām Krāmdera formulas, aprēķinām $\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3$.

Pēc Oma likuma rēķinām zaru strāvas,

$$I'_{41} = \frac{E'_{41} - (\varphi_1 - \varphi_4)}{R'_{41}} = \frac{10 - (6 - 0)}{1} = 4A$$

$$I'''_{21} = \frac{0 - (\varphi_1 - \varphi_2)}{R'''_{21}} = \frac{-(6 - 0,06)}{5} = -1,185A$$

$$I'_{32} = \frac{E'_{32} - (\varphi_2 - \varphi_3)}{R'_{32}} = \frac{7 - (0,06 + 1,1)}{2} = 2,92A$$

$$I_{43} = \frac{E_{43} - (\varphi_3 - \varphi_4)}{R_{43}} = \frac{8 - (-1,107 - 0)}{2} = 4,55A$$

2.13. Zvaigznes un trīsstūra slēgumu pārveidošana

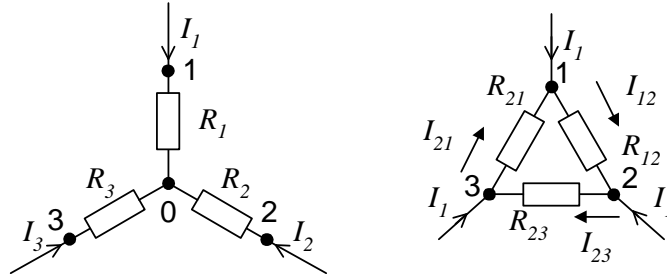
Biežāk ir nepieciešams trīsstūra slēgumu pārveidot ekvivalentā zvaigznes slēgumā.

Pārveidojot no viena slēguma uz otru, pienākošajām strāvām, gan trīsstūrim, gan zvaigznei jābūt vienādām $I_1; I_2; I_3$, punktu potenciāliem arī ir jāatbilst.

Pēc pirmā Kirhofa likuma zvaigznes slēgumam (2.16.att.) var rakstīt,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\begin{cases} I = (\varphi_1 - \varphi_0)g_1 \\ I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0)g_2 \\ I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0)g_3 \end{cases} \quad (2.19)$$



2.16. att.

$$\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 - \varphi_0 (g_1 + g_2 + g_3) = 0,$$

no kurienes izsakām φ_0 .

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (2.20)$$

Tālāk var rakstīt,

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0)g_1 = \frac{[\varphi_1(g_2 + g_3) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_3]g_1}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Attiecīgi *trīsstūrī* izteiksim strāvu I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2)g_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1)g_{13} = \\ &= \varphi(g_{12} + g_{13}) - \varphi_3 g_{13} - \varphi_2 g_{12} \end{aligned}$$

Tā kā I_I trīsstūrim vienāds ar I_I zvaigznei, tad var rakstīt,

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; g_{13} = \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \quad (2.21)$$

Ar sakarībām (2.21) mēs varam savstārpēji aizstāt zvaigzni ar trīsstūri, un otrādi.

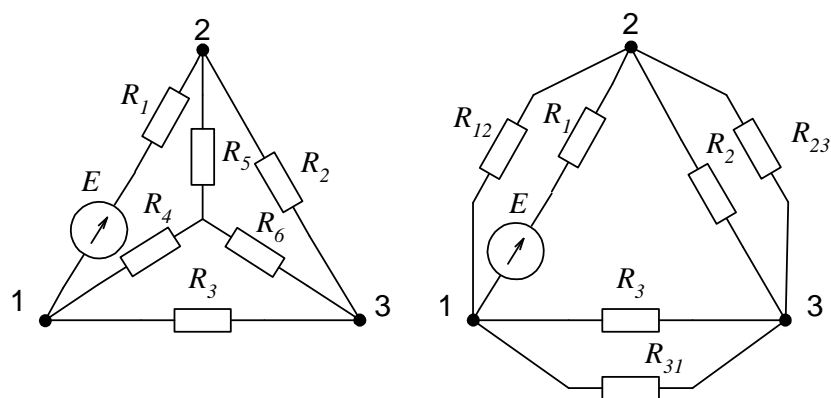
No sakarībām (2.21) varam izteikt R_1 ; R_2 ; R_3 zvaigznei.

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; R_3 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2.22)$$

Piemērs

Aizstāt zvaigzni ar trīsstūri.

Dots: $R_1=1\Omega$; $R_2=2\Omega$; $R_3=5\Omega$; $R_4=1\Omega$; $R_5=2\Omega$; $R_6=5\Omega$; $E=10V$.



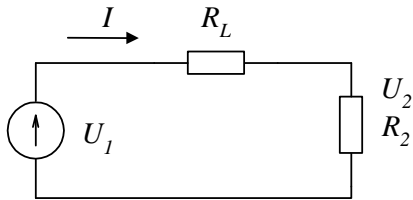
2.17. att.

$$g_{12} = \frac{0,5 \cdot 1}{1 + 0,5 + 0,2} = \frac{0,5}{1,7}; \quad R_{12} = \frac{1}{g_{12}} = \frac{1,7}{0,5} = 3,4\Omega$$

$$g_{23} = \frac{0,5 \cdot 0,333}{1,7} = \frac{0,1}{1,7}; \quad R_{23} = \frac{1}{g_{23}} = \frac{1,7}{0,1} = 17\Omega$$

$$g_{31} = \frac{1 \cdot 0,2}{1,7} = \frac{0,2}{1,7}; \quad R_{31} = \frac{1}{g_{31}} = \frac{1,7}{0,2} = 8,5\Omega$$

2.14. Enerģijas pārvadišana pa līniju



R_L - līnijas vadu pretestība;
 U_1 - ģenerators spriegums;
 U_2 - spriegums uz slodzes;
 R_2 - slodzes pretestība.

2.17. att.

Jauda, kuru atdod avots,

$$P_1 = U_1 I.$$

Jauda, kuru saņem patērētājs,

$$P_2 = U_1 I - I^2 R_L. \quad (2.23)$$

Zudumu jauda līnijā,

$$P_{\Delta} = I^2 R_L = I U_{\Delta}. \quad (2.24)$$

Jo lielāka strāva līnijā, jo lielāki zudumi. *Palielinot strāvu vados, pārvadītā jauda palielinās tieši proporcionāli strāvai, bet zudumu jauda pieaug kvadrātiski.*

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{R_L I}{U_1}. \quad (2.25)$$

Jo augstāks spriegums U_1 , jo lielāks lietderības koeficients η . *Palielinot spriegumu pārvadītā jauda palielinās proporcionāli, ja strāva nepalielinās, zudumu jauda nemainās.*

$$U_2 = U_1 - R_L I. \quad (2.26)$$

Lieljaudas līnijām lietderības koeficients $\eta=0,94\dots0,97$.

3. VIENFĀZES MAINSTRĀVAS ĶĒDES

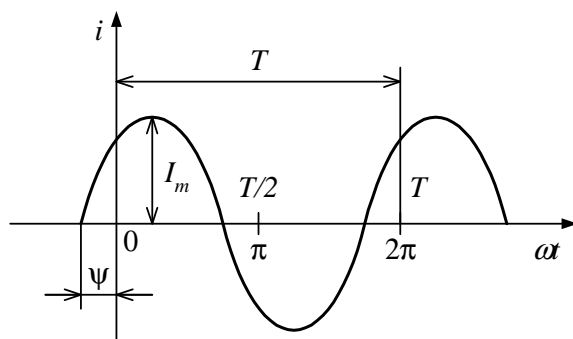
3.1. Sinusoidāla strāva un to raksturojošie lielumi

Sinusoidāla maiņstrāva ir *laikā mainīga strāva*, kas mainās atbilstoši sinusa funkcijai.

Strāvas momentāno vērtību i var noteikt pēc sakarības,

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \psi\right) = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (3.1)$$

Funkcijas maksimālā vērtība ir I_m – tā ir strāvas amplitūda, maksimālās novirzes vērtība no 0 līmeņa; T – svārstību periods, laiks, kurā notiek viena pilna svārstība.



3.1.att. Sinusoidāli mainīgas strāvas laika raksturlīkne

Frekvence f svārstību skaits sekundē,

$$f = \frac{1}{T}. \quad (3.2)$$

Frekvenci mēra, s^{-1} vai hercos, Hz.

Leņķiskā frekvence raksturo rotācijas ātrumu, to var aprēķināt ar sakarību,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.3)$$

Leņķiskās frekvences mērvienības ir, rad/s vai mēdz lietot, s^{-1} .

Sinusa argumentu $(\omega t + \psi)$ sauc par fāzi.

Fāze raksturo svārstību stāvokli, skaitlisko sinusoidālās funkcijas vērtību laika momentā t .

Ja $t = 0$ tad fāzes leņķa vērtība ir ψ , to sauc par sākuma fāzes leņķi.

Jebkuru sinusoidāli mainīgu funkciju var aprakstīt ar trīs lielumiem:

- Amplitūdu;
- Leņķisko frekvenci;
- Sākuma fāzes leņķi.

3.2. Sinusoidālas strāvas vidējā un efektīvā vērtība

Strāvas vidējā vērtība ir viena pusperioda vidējā vērtība,

$$I_{vid} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0.638 I_m. \quad (3.5)$$

Līdzīgi var aprēķināt vidējo vērtību EDS un spriegumam,

$$E_{vid} = \frac{2}{\pi} E_m = 0.638 E_m, \quad (3.6)$$

$$U_{vid} = \frac{2}{\pi} U_m = 0.638 U_m. \quad (3.7)$$

Visplašāk praksē sinusoidāli mainīgu elektrisko lielumu mērīšanai lieto *efektīvo vērtību*, tā ir vidēji kvadrātiskā vērtība. Sinusoidālas strāvas efektīvo vērtību var noteikt,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m. \quad (3.8)$$

Tātad strāvas efektīvā vērtība ir 0,707 no strāvas amplitūdas vērtības.

Līdzīgi var aprēķināt efektīvo vērtību EDS un spriegumam,

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0.707 E_m, \quad (3.9)$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m. \quad (3.10)$$

Pēc siltumdarbības maiņstrāvas efektīvā vērtība ir ekvivalenta līdzstrāvai,

$$I_{\text{efekt}} = I_{\text{līdz}} \quad (3.11)$$

Tā ir līdzvērtīga pēc atdotā siltuma daudzuma laika vienībā, ja strāva plūst caur to pašu pretestību R .

$$Q = Q_{\text{līdz}}. \quad (3.12)$$

Efektīvās strāvas siltumdarbību var pierādīt:

Viena sinusoidālas strāvas perioda T izdalītais siltums uz pretestības R ir aprēķināms,

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt = RI_m^2 \frac{T}{2}. \quad (3.13)$$

Līdzstrāvai, tai pašā laikā T uz pretestības R izdalītais siltums ir,

$$Q_{\text{līdz}} = RI_{\text{līdz}}^2 T. \quad (3.14)$$

Salīdzinām maiņstrāvas un līdzstrāvas izdalīto siltumu,

$$RI_m^2 \frac{T}{2} = RI_{\text{līdz}}^2 T. \quad (3.15)$$

Izteiksmi matemātiski pārveidojot iegūstam,

$$\frac{I_m^2}{2} = I_{\text{līdz}}^2, \quad (3.16)$$

$$I_{\text{līdz}} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.17)$$

Tātad sinusoidāla maiņstrāva ar efektīvo vērtību, kas skaitliski atbilst līdzstrāvas vērtībai, laika vienībā uz pretestības atdod to pašu siltuma daudzumu. Te ir izmantots kalorimetriskais salīdzinājums, salīdzinājums pēc izdalītā siltuma daudzuma uz pretestības, to plaši izmanto augstfrekvences mērījumos.

3.3. Amplitūdas un formas koeficienti

Amplitūdas koeficients k_a ir sinusoidāli mainīgas periodiskas funkcijas amplitūdas attiecība pret efektīvo vērtību, sinusoidālai strāvai tas ir,

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}. \quad (3.18)$$

Formas koeficients k_f ir efektīvās vērtības attiecība pret vidējo pusperioda vērtību, sinusoidālai strāvai tas ir,

$$k_f = \frac{I}{I_{vid.}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11. \quad (3.19)$$

Nesinusoidālai strāvai šis aprēķins neatbilst !

Formas koeficients nesinusoidālai strāvai jāaprēķina ņemot vērā strāvas vidējo vērtību,

$$k_f = \frac{I}{I_{vid.}}, \quad (3.20)$$

kur $I_{vid.}$ - noteikts pēc moduļa vērtības konkrētajai strāvai.

3.4. Kompleksā plakne

Sinusoidālu lielumu izmaiņas attēlošana ar vektoriem kompleksajā plaknē.

Kompleksais skaitlis satur *reālo* un *imagināro* (iedomāto) daļu. Par imagināro vienību sauc tādu skaitli, kura kvadrāts ir vienāds ar „-1”,

$$i^2 = -1. \quad (3.21)$$

Elektrotehnikā ar burtu i apzīmējam momentāno strāvu, tāpēc elektrotehniskajos aprēķinos imagināro vienību apzīmēsim ar j .

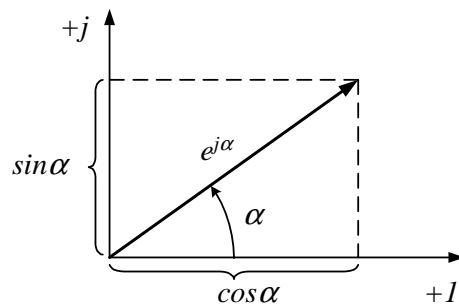
Izveidosim komplekso plakni, kur uz vertikālās ass atliksim imagināro skaitļa daļu, bet uz horizontālās ass reālo. Nosacīti, uz horizontālās ass uzliksim apzīmējumu +1, bet uz imaginārās ass + j .

Imagināro vienību elektrotehnikā raksturo sakarības,

$$j = \sqrt{-1} \quad \text{vai} \quad j^2 = -1 \quad (3.22) \quad (3.23)$$

No matemātikas kursa ir zināma *Eilera formula*,

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (3.24)$$



3.2.att. **Eilera formulas grafiskā interpretācija**

Funkcijas $e^{j\alpha}$ modulis ir =1,

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1 \quad (3.25)$$

projekcija uz $+1$ ass ir $\cos \alpha$;

projekcija uz $+j$ ass ir $\sin \alpha$;

leņķi α mēra no $+1$ ass, pretēji pulksteņa rādītāja virzienam ir „+” virziens.

Te ir taisnleņķa trīsstūris un darbojas Pitagora teorēma,

$$h^2 = k^2 + p^2. \quad (3.26)$$

Šai gadījumā hipotenūza ir vienu vienību gara.

Funkciju $e^{j\alpha}$ var reizināt ar jebkuru skaitli, pareizināsim ar strāvas amplitūdu I_m ,

rezultātā iegūsim funkciju $I_m e^{j\alpha}$.

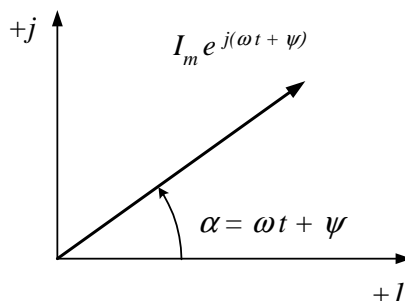
Rakstīsim Eilera formulu,

$$I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + j I_m \sin \alpha \quad (3.27)$$

Šī ir tā pati funkcija $e^{j\alpha}$ tikai visi vektori attiecīgi I_m reizes lielāki. Leņķis α – var būt jebkurš leņķis. Pieņemsim, ka

$$\alpha = \omega t + \psi \quad (3.28)$$

un α mainās tieši proporcionāli laikam.



3.3.att. Sinusoidālas strāvas vektors kompleksajā plakne

Tad varam rakstīt,

$$I_m e^{j(\alpha + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + j I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.29)$$

Funkcijas $I_m e^{j(\alpha + \psi)}$ reālā daļa ir projekcija uz reālo skaitļu $+1$ asi un to apzīmē ar Re ,

$$\text{Re } I_m e^{j(\alpha + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi). \quad (3.30)$$

Funkcijas $I_m e^{j(\alpha + \psi)}$ imaginārā daļa ir projekcija uz imagināro skaitļu $+j$ ass un to apzīmē ar Im , tā apraksta momentāno sinusoidālo strāvu i ,

$$\text{Im } I_m e^{j(\alpha + \psi)} = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (3.31)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im } I_m e^{j(\alpha + \psi)} \quad (3.32)$$

Tādā veidā var apliecināt, ka sinusoidāli mainīgu strāvu i var uzdot, kā $\text{Im } I_m e^{j(\alpha + \psi)}$, jeb rotējoša vektora $I_m e^{j(\alpha + \psi)}$ projekciju uz $+j$ ass.

3.5. Kompleksā amplitūda

Ir pieņemts, kompleksajā plaknē sinusoidāli mainīgu lielumu vektorus attēlot laika momentā $\omega t = 0$. Ja vektoru $I_m e^{j(\alpha + \psi)}$ apskata laika momentā $\omega t = 0$, tad tas būs vienāds ar,

$$I_m e^{j\psi} = \dot{I}_m. \quad (3.33)$$

\dot{I}_m ir komplekss lielums, kura modulis ir vienāds ar strāvas amplitūdu,

$$|\dot{I}_m| = I_m \quad (3.34)$$

un vektora \dot{I}_m leņķis pret +1 asi ir vienāds ar ψ .

\dot{I}_m sauc par *komplekso strāvas i amplitūdu*. Tā atspoguļo strāvu i kompleksajā plaknē laika momentā $\omega t = 0$.

Piemērs

Dota : strāva $i = 5 \sin(\omega t + 10^\circ) A$.

Uzrakstīt komplekso strāvas amplitūdu.

Dotajā gadījumā strāvas amplitūda ir $I_m = 5 A$;

Sākuma fāzes nobīdes leņķis $\psi = 10^\circ$.

Rezultāts: $\dot{I}_m = 5e^{j10^\circ} A$

Piemērs

Dota: Kompleksā amplitūda strāvai $\dot{I}_m = 20e^{-j25^\circ} A$

Uzrakstīt strāvas momentānās vērtības vienādojumu.

Rezultāts: $i = 20 \sin(\omega t - 25^\circ) A$

Komplekso efektīvo vērtību I var aprēķināt komplekso amplitūdu dalot ar $\sqrt{2}$,

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = I \cdot e^{j\psi}, \quad \dot{i} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j25^\circ} A \quad (3.35)$$

3.6. Sinusoidālu funkciju saskaitīšana

Pieņemsim, ka jāskaita divas strāvas i_1 un i_2 vienai un tai pašai frekvencei. Summa dod rezultātu i .

$$i = i_1 + i_2 \quad (3.36)$$

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \quad (3.37)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) \quad (3.38)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (3.39)$$

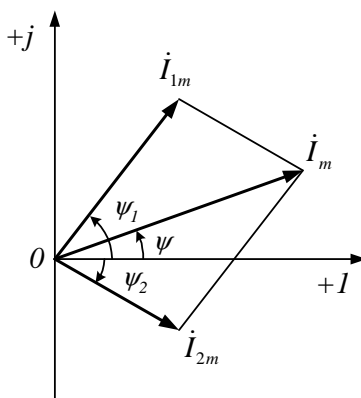
Ir nepieciešams noteikt amplitūdu I_m un sākuma fāzi ψ strāvai i .

Lai saskaitītu strāvas i_1 un i_2 tās apzīmēsīm ar vektoriem,

$$i_1 \rightarrow \dot{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\psi_1} \quad (3.40)$$

$$i_2 \rightarrow \dot{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\psi_2} \quad (3.41)$$

I_m strāvas amplitūdu noteiks summārais vektora garums, bet sākuma fāzi leņķis ψ pret asi $+1$.



3.4.att. Vektoru saskaitīšana kompleksajā plaknē

Ja vektori \dot{I}_{1m} , \dot{I}_{2m} un \dot{I}_m rotētu ap kompleksās plaknes 0 punktu, to savstarpējie leņķi saglabātos nemainīgi.

3.7. Momentānā jauda

Enerģijas patērēšanas ātrumu raksturo jauda.

Momentānā jauda ir attiecīgā ķēdes posma momentānā sprieguma un strāvas reizinājums, tā ir laika funkcija, kas parāda shēmas patērēto jaudu konkrētā laika momentā,

$$p = ui \quad . \quad (3.42)$$

Maiņstrāvas ķēdēs nav tikai aktīvi jaudas patērētāji, kuri izdala siltumu. Jēdziens *pretestība* maiņstrāvas ķēdei atšķirībā no līdzstrāvas ir daudz plašāks. Maiņstrāvas ķēde parasti sastāv no *aktīvās pretestības* R un *reaktīvās pretestības*, kuru veido induktivitātes L un kapacitātes C . *Aktīvie shēmas elementi* neatgriezeniski patērē enerģiju, to pārvērš siltumā, vai citā enerģijas veidā. *Reaktīvie shēmas elementi* enerģiju neizdala siltuma veidā, bet periodiski uzkrāj magnētiskajā vai elektriskajā laukā un atdod atpakaļ. Momentānās jaudas darbību R, L, C shēmas elementos apskatīsim nākošajās nodaļās.

3.8. Sinusoidālā strāva aktīvajā pretestībā

Caur aktīvo pretestību plūstošā strāva un spriegums neveido fāžu nobīdi, rezultātā kompleksā strāva \dot{I} sakrīt ar komplekso spriegumu \dot{U} .



3.5.att. Strāva un spriegums aktīvajā pretestībā

Momentāno maiņstrāvu apraksta sakarība,

$$i = I_m \sin \omega t \quad (3.43)$$

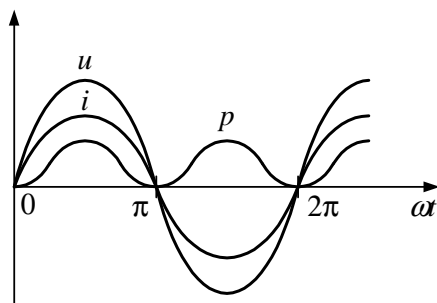
Momentāno spriegumu varam izteikt pēc Oma likuma,

$$u = iR = RI_m \sin \omega t , \quad (3.44.)$$

$$u = U_m \sin \omega t , \quad (3.45)$$

kur,

$$U_m = RI_m . \quad (3.46)$$



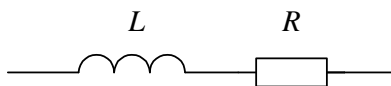
3.6.att. **Momentānās strāvas, sprieguma un jaudas laika diagramma aktīvai pretestībai**

Sinusoidālas strāvas momentāno jaudu uz aktīvās pretestības apraksta sakarība,

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin \omega t . \quad (3.47)$$

3.9. Induktivitāte sinusoidālas strāvas ķēdē

Jebkurai reālai spolei ir aktīvā pretestība R un induktivitāte L .



3.7.att. **Spole**

Apskatīsim kā darbojas komponente L , vienīgi L bez R .

Ja caur spoli L plūst strāva $i = I_m \sin \omega t$, tad spolē inducējas pašindukcijas *EDS*,

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t - 90^\circ) \quad (3.48)$$

e_L - praktiski darbojas pretēji pieliktajam spriegumam,

$$u_{ab} = u = -e_L, \quad (3.49)$$

tāpēc

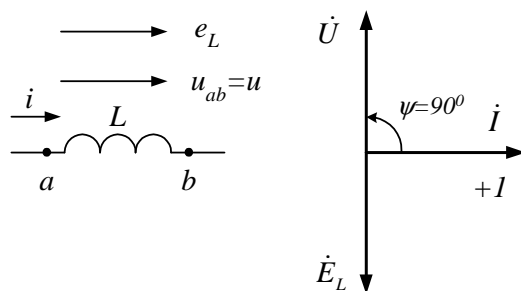
$$u = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (3.50)$$

kur

$$U_m = \omega L I_m \quad (3.51)$$

$$X_L = \omega L \quad (3.52)$$

kur X_L ir induktīvā pretestība, to mēra omos, Ω .

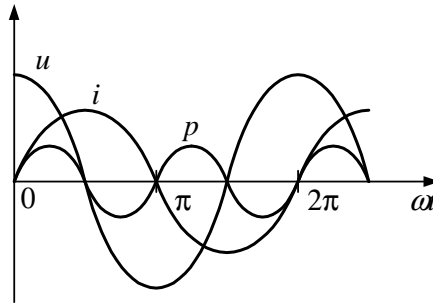


3.8.att. Strāva un spriegums induktīvajā pretestībā

Spriegums apsteidz strāvu fāzē par 90° (3.8.att.).

Vektors \dot{U} apsteidz \dot{I} par 90° . Kompleksais *EDS* \dot{E}_L atrodas pretfāzē ar komplekso spriegumu \dot{U} .

Iedomājieties pārejas procesu, ka pieslēdzam spolei līdzspriegumu..., vispirms uz spailēm ir spriegums, tikai pēc tam sāk plūst strāva. **Vispirms ir spriegums, tad strāva.**



3.8.att. **Momentānās strāvas, sprieguma un jaudas laika diagramma induktīvai pretestībai**

Maiņstrāvas ķēdē ieslēgta spole uzkrāj un atdod enerģiju:

- Pirmajā perioda ceturtdaļā spole uzkrāj enerģiju no enerģijas avota, magnetizējas;
- Otrajā perioda ceturtdaļā strāva ķēdē samazinās no maksimālās līdz 0, enerģija tiek atdota atpakaļ avotam, momentānā jauda ir ar „-” zīmi.
- Trešajā perioda ceturtdaļā no avota atkal tiek ņemta enerģija un uzkrāta, tikai magnetizēšana notiek ar pretēja virziena lauku.
- Ceturtajā perioda ceturtdaļā magnētiskais lauks atbrīvojas no enerģijas un tā tiek atdota atpakaļ tīklā.

3.10. Kondensators sinusoidālas strāvas ķēdē

Ja uzlādē kondensatoru, tad lādiņš uz vienas plates ir,

$$q = Cu \quad (3.53)$$

un uz otras plates,

$$-q = -Cu . \quad (3.54)$$

Caur kondensatoru līdzstrāva neplūst!

$$i = \frac{dq}{dt} = 0 . \quad (3.55)$$

Ja ir sinusoidāls spriegums,

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (3.56)$$

lādiņš q mainīsies,

$$q = Cu = CU_m \sin \omega t, \quad (3.57)$$

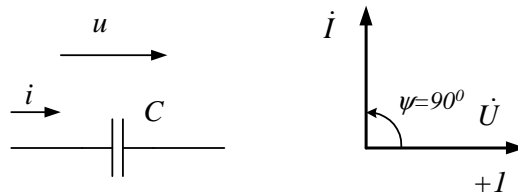
kondensators periodiski pārlādēsies un veidosies *pārlādēšanās strāva*,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_m \sin \omega t) = \omega CU_m \cos \omega t = \omega CU_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (3.58)$$

Strāvas \dot{I} vektors apsteidz spriegumu \dot{U} par 90° .

Iedomājieties pārejas procesu, ka pieslēdzam līdzspriegumam izlādētu kondensatoru..., pieslēgšanas brīdī ir ļoti liela strāva – īsslēgums, tad kondensators sāk uzlādēties un pēc kāda laika spriegums uz spailēm sasniedz pieslēgtā avota spriegumu.

Vispirms ir strāva, tad spriegums.



3.9.att. **Strāva un spriegums kapacitīvajā pretestībā**

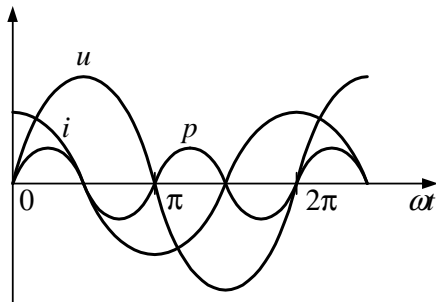
Praktiska nozīme ir sakarībai, kas apraksta kapacitīvo strāvu,

$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{X_c} \quad (3.59)$$

kur X_c ir kapacitīvā pretestība, to mēra omos, Ω .

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (3.60)$$

Kapacitīvā pretestība ir apgriezti proporcionāla frekvencei f .



3.10.att. **Momentānās strāvas, sprieguma un jaudas laika diagramma kapacitīvai pretestībai**

Momentānā jauda ķēdei ar kapacitāti ir,

$$p = ui = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \quad (3.61)$$

3.11. Simboliskā metode

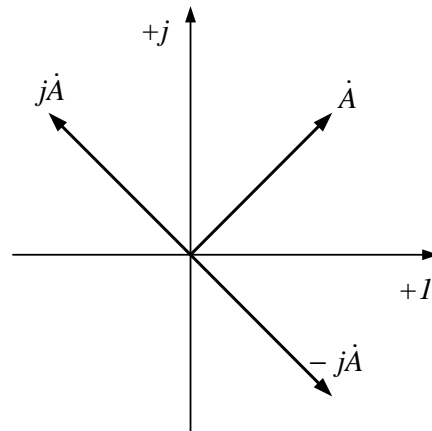
Simboliskās vai kompleksās metodes būtība ir tāda, ka sinusoidālās maiņstrāvas aprēķinus, kur vienādojumi sastādīti momentānajām vērtībām un jāreķina ar diferenciālvienādojumiem, aizstāj ar algebriskiem vienādojumiem izmantojot strāvu un spriegumu simbolus vai kompleksus.

Jebkurā vienādojumā, kas sastādīts pēc Kirhoha likumiem:

1. Momentāno strāvu i aizstāj ar komplekso amplitūdu \dot{I}_m
2. Momentāno spriegumu uz aktīvās pretestības $u_R = Ri$ aizstāj ar $\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m$, kas fāzē sakrīt ar \dot{I}_m .
3. Momentāno spriegumu uz induktivitātes $u_L = L\frac{di}{dt}$ aizstāj ar $\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m j\omega L$, kas apsteidz strāvu par 90° .

4. Momentāno spriegumu uz kapacitāti $u_c = \frac{1}{C} \int idt$ aizstāj ar $\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right)$, kas atpaliek no strāvas par 90° .

5. Momentāno *EDS* aizstāj ar komplekso \dot{E}_m .



3.11.att. **Vektora A fāzes nobīde reizinot ar + j un -j**

Kompleksā induktīvā sprieguma amplitūda,

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m jX_L = \dot{I}_m j\omega L, \quad (3.62)$$

ir strāvas amplitūdas \dot{I}_m un induktīvās pretestības $X_L = \omega L$ reizinājums.

Reizinātājs j norāda, ka sprieguma vektors apsteidz strāvu par 90° .

Kompleksā kapacitatīvā sprieguma amplitūda,

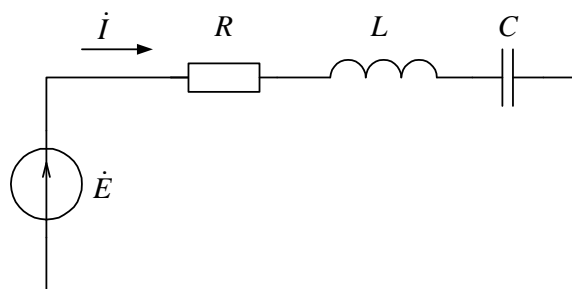
$$\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m (-j)X_C = \dot{I}_m \frac{-j}{\omega C}, \quad (3.63)$$

ir strāvas amplitūdas \dot{I}_m un kapacitatīvās pretestības $X_C = \frac{1}{\omega C}$ reizinājums.

Reizinātājs $-j$ nozīmē, ka sprieguma vektors atpaliek no strāvas par 90° .

Piemērs

Noteikt kāda strāva plūdis ķēdē.



3.12.att. Shēma

Pēc otrā Kirhofa likuma sastādīsim momentāno spriegumu vienādojumu 3.12. attēlā redzamajai shēmai,

$$u_R + u_L + u_C = e \quad (3.64)$$

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e$$

Uzrakstīsim to pašu vienādojumu *kompleksā* formā,

$$\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m \quad (3.65)$$

kur, $R\dot{I}_m$ - sprieguma kritums uz aktīvās pretestības R ;

$j\omega L\dot{I}_m$ - sprieguma kritums uz induktivitātes L ;

$-\frac{j}{\omega C}\dot{I}_m$ - sprieguma kritums uz kapacitātes C .

Strāvu \dot{I}_m var iznest pirms iekavām,

$$\dot{I}_m \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m \quad (3.66)$$

Praktiski varam izteikt un izrēķināt strāvu \dot{I}_m ,

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} \quad (3.67)$$

3.12. Kompleksā pretestība, Oma likums

Vienādojumā (3.66) iekavās ir komplekso pretestību summa, šo pretestību summu apzīmē ar Z un sauc par *komplekso pretestību*,

$$Z = ze^{j\varphi} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \quad (3.68)$$

kur, z - kompleksās pretestības moduļa vērtība;

Z - kompleksā pretestība.

Punktu uz kompleksās pretestības apzīmējuma Z neliek. Punktu lieto tikai sinusoidālu funkciju kompleksu lielumu apzīmēšanai $\dot{I}, \dot{U}, \dot{E}$,

$$\dot{I}_m Z = \dot{E}_m. \quad (3.69)$$

Iepriekšējo izteiksmi dalām ar $\sqrt{2}$ un pārejam uz efektīvajām \dot{I} un \dot{E} vērtībām. Izsakot strāvu \dot{I} , iegūstam *Oma likumu sinusoidālai strāvai*,

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}. \quad (3.70)$$

Kompleksā pretestība vispārīgā veidā satur reālo daļu R un imagināro daļu jX ,

$$Z = R + jX, \quad (3.71)$$

kur, R - aktīvā pretestība;

X - reaktīvā pretestība,

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (3.72)$$

3.13. Kompleksā vadītspēja

Kompleksā vadītspēja Y ir kompleksās pretestības Z apgrieztais lielums,

$$Y = \frac{1}{Z} = g - jb = ye^{-j\varphi} \quad (3.73)$$

kur, g - aktīvā vadītspējas komponente, reālā daļa;

b - reaktīvā vadītspējas komponente, imaginārā daļa;

y - vadītspējas moduļa vērtība.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb \quad (3.74)$$

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (3.75)$$

Oma likumu sinusoidālai strāvai kompleksā formā varam uzrakstīt šādi,

$$\dot{I} = \dot{U}Y \quad (3.76)$$

$$\dot{I} = \dot{U}g - j\dot{U}b = \dot{I}_a + \dot{I}_r \quad (3.77)$$

kur, \dot{I}_a - aktīvā strāvas komponente;

\dot{I}_r - reaktīvā strāvas komponente.

3.14. Pretestību un vadītspēju trīsstūris

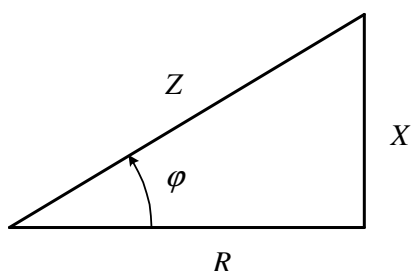
Pretestības trīsstūris ir ķēdes pilnās pretestības moduļa z , aktīvās R un reaktīvās X pretestības grafiska interpretācija. Kompleksās pretestības modulis z ir taisnleņķa trīsstūra hipotenūza,

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.78)$$

Starp piekatei R un hipotenūzu z ir fāžu nobīdes leņķis φ , tas ir leņķis starp reālo komponenti un pilno pretestību, to apraksta sakarības,

$$\cos \varphi = \frac{R}{z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R};$$

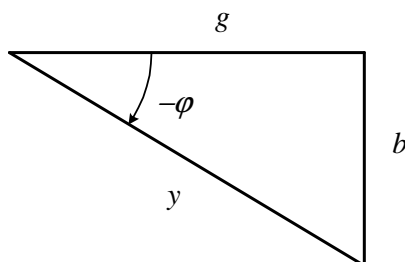
$$\varphi = \arccos \frac{R}{z} = \arcsin \frac{X}{z} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} \quad (3.79)$$



3.13.att. **Pretestību trīsstūris**

Vadītspējas trīsstūris ir ķēdes pilnās vadītspējas moduļa y , aktīvās g un reaktīvās b vadītspējas komponentu grafiska interpretācija. Kompleksās vadītspējas modulis y ir taisnleņķa trīsstūra hipotenūza,

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (3.80)$$



3.14.att. **Vadītspēju trīsstūris**

Vadītspēju trīsstūri izmanto paralēlu zaru aprēķinos.

3.15. Kirhofa likumi simboliskajā formā

Pirmais Kirhofa likums ir šāds, mezglu punktam pienākošo strāvu summa ir vienāda ar aizejošo strāvu summu. Mezglu punktā visu momentāno strāvu summa ir vienāda ar 0. Uzrakstīsim *pirmo Kirhofa likumu sinusoidālai strāvai*,

$$\sum i_k = 0 \quad (3.81)$$

aizvietosim i_k ar kompleksajām strāvām \dot{I}_k , rezultātā iegūstam *pirmo Kirhofa likumu simboliskajā formā*,

$$\sum \dot{I}_k = 0 \quad (3.82)$$

Otrais Kirhofa likums ir šāds, visu sprieguma kritumu summa noslēgtam kontūram ir vienāda ar visu avotu elektrodzinējspēku summu.

Sinusoidālam maiņspriegumam otrais Kirhofa likums ir šāds,

$$\sum_{k=1}^n \left(i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^n e_k \quad (3.83)$$

Aizvietosim momentānos spriegumus ar kompleksajiem un iegūsim *Otro Kirhofa likumu simboliskā formā*,

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \quad (3.84)$$

Summējot sprieguma kritumus un elektrodzinējspēkus, jāņem vērā pozitīvais kontūra apsekošanas virziens, strāvu virzieni un elektrodzinējspēku virzieni.

3.16. Vektoru diagrammu izmantošana

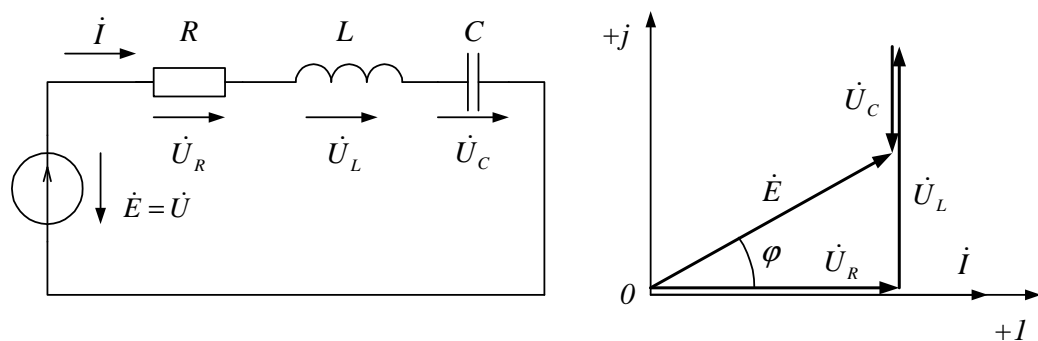
Vektoru diagramma ir vektoru kopums uz kompleksās plaknes, kas attēlo sinusoidāli mainīgu funkciju tai pašā laikā un pie tās pašas frekvences, ievērojot vektoru attiecību vienam pret otru, atkarībā no fāzes nobīdes.

Parasti vektoru diagrammu zīmē no viena punkta, bet ja šos vektorus novieto vienu aiz otra summēšanas secībā, veidojas topogrāfiskā diagramma. Topogrāfiskās diagrammas parasti izmanto, lai ģeometriski atspoguļotu shēmas potenciālu sadalījumu un spriegumus starp mezglu punktiem.

Vektoru diagrammas izmanto grafiski analītiskajos aprēķinos un aprēķinos ar proporcionālu lielumu metodi. Ar vektoru diagrammas palīdzību var pārbaudīt analītisko aprēķinu pareizību.

Ir *sprieguma* vektoru diagrammas un *strāvas* vektoru diagrammas.

Sprieguma vektoru diagrammu konstruē virknes slēguma ķēdei (3.15.att.).



3.15.att. **Virknes slēguma ķēde un sprieguma vektoru diagramma**

Attēlā 3.15. redzamā vektoru diagramma ir ģeometriskā interpretācija vienādojumam,

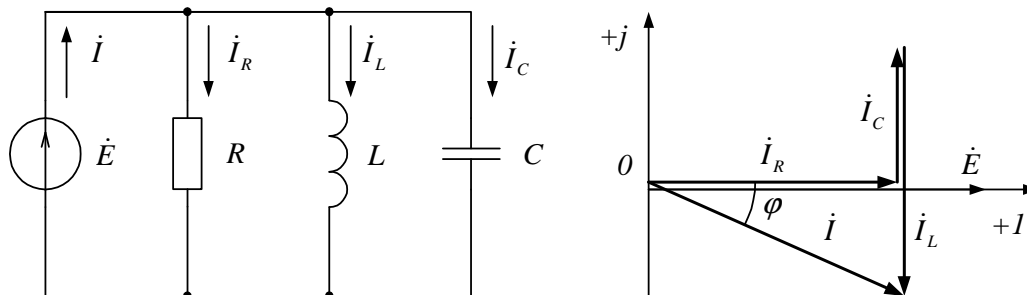
$$\dot{E} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{i} + j\omega L\dot{i} - j\frac{1}{\omega C}\dot{i}. \quad (3.85)$$

Aktīvā sprieguma vektora \dot{U}_R un strāvas \dot{I} **virzieni sakrīt**. Ja barošanas sprieguma vai strāvas virziens nav norādīts, tad pieņemam, ka strāvas \dot{I} vektora virziens sakrīt ar reālo skaitļu ass +1 virzienu.

Reizinātājs $+j$ norāda, ka **induktīvā sprieguma** vektors \dot{U}_L apsteidz strāvu par 90° un **ir vērsts uz augšu**.

Reizinātājs $-j$ nozīmē, ka **kapacitatīvā sprieguma** vektors atpaliek no strāvas par 90° un vektors \dot{U}_C **ir vērsts uz leju**.

Strāvas vektoru diagrammas konstruē paralēla slēguma ķēdēm (3.16.att.).



3.16.att. **Paralēla slēguma ķēde un strāvas vektoru diagramma**

Vektoru diagramma (3.16.att.) konstruēta pamatojoties uz sakarību,

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{E}}{R} + \frac{\dot{E}}{j\omega L} + \frac{\dot{E}}{-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{E}}{R} - j\frac{\dot{E}}{\omega L} + j\frac{\dot{E}}{\omega C} \quad (3.86)$$

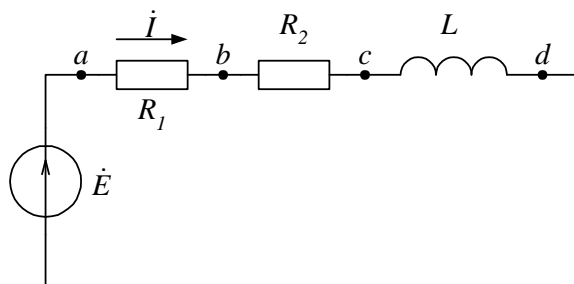
Aktīvās strāvas vektora \dot{I}_R un elektrodzinējspēka \dot{E} **virzieni sakrīt**. Ja barošanas EDS vai strāvas virziens nav norādīts, tad pieņemam, ka elektrodzinējspēka \dot{E} vektora virziens sakrīt ar reālo skaitļu ass +1 virzienu. Reizinātājs $-j$ nozīmē, ka **induktīvās strāvas** vektors atpaliek no sprieguma par 90° un vektors \dot{I}_L **ir vērsts uz leju**.

Reizinātājs $+j$ norāda, ka **kapacitatīvās strāvas** vektors apsteidz spriegumu par 90° un vektors \dot{I}_C **ir vērsts uz augšu**.

Piemērs

Noteikt strāvu un spriegumu shēmas (3.17.att.) elementiem.

Dots:



$$e = 141 \sin \omega t$$

$$R_1 = 3 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

$$L = 0,00955 H$$

$$\omega = 314 s^{-1}$$

3.17.att. **Shēma**

Pēc Otrā Kirhofa likuma var sastādīt vienādojumu sinusoidāla sprieguma kontūram

$$i(R_1 + R_2) + L \frac{di}{dt} = e \quad (3.87)$$

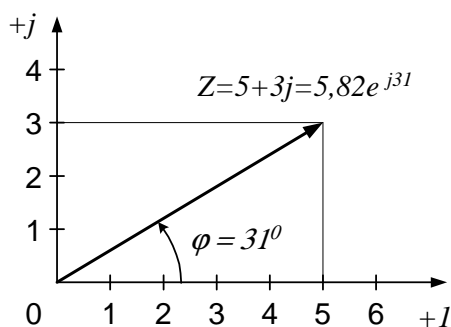
Kompleksā formā šis vienādojums ir,

$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L \dot{I} = \dot{E} \quad (3.88)$$

$$\dot{I}Z = \dot{E}$$

Aprēķināsim ķēdes pilno pretestību Z ,

$$Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 2 + 3 + j314 \cdot 0,00955 = 5 + 3j = 5,82e^{j31^\circ}$$



$$5,82 = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

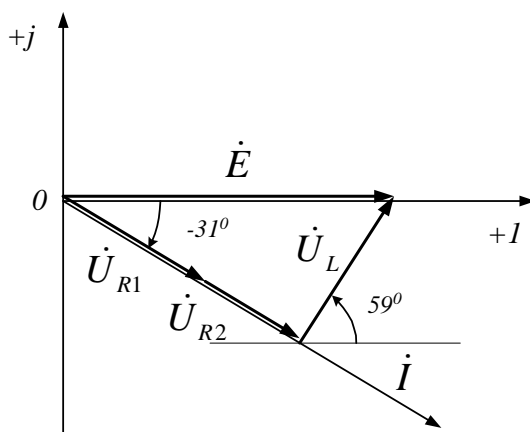
$$\varphi = \arctg \frac{3}{5} = 31^\circ$$

3.18.att. **Kompleksā skaitļa $5+3j$ grafiskā interpretācija**

Aprēķinām komplekso efektīvo elektrodzinējspēku,

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100V,$$

kur E_m - dotā sinusoidālā EDS amplitūda.



3.19.att. **Vektoru diagramma**

Aprēķinām strāvu ķēdē,

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{100}{5,82e^{j31^{\circ}}} = 17,2e^{-j31^{\circ}} \text{ A}$$

Spriegums uz pretestības R_1 ,

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 3 \cdot 17,2e^{j31^{\circ}} = 51,6e^{-j31^{\circ}} \text{ V}$$

Spriegums uz pretestības R_2 ,

$$\dot{U}_{R_2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 2 \cdot 17,2e^{-j31^{\circ}} = 34,4e^{-j31^{\circ}} \text{ V}$$

Spriegums uz induktivitātes L ,

$$\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L \dot{I} = j314 \cdot 0,00955 \cdot 17,2e^{-j31^{\circ}} = 51,6e^{j59^{\circ}} \text{ V}$$

Reizinājums ar $j = e^{j90^{\circ}}$, pagriež sprieguma vektoru par 90° pretēji pulksteņa rādītāja virzienam $j \cdot e^{-j31^{\circ}} = e^{j90^{\circ}} \cdot e^{-j31^{\circ}} = e^{j59^{\circ}}$.

Induktīvais spriegums apsteidz strāvu par 90° , skatīt attēlā 3.19.

Piemērs

Aprēķināt kondensatora kapacitāti C un uzkonstruēt vektoru diagrammu.

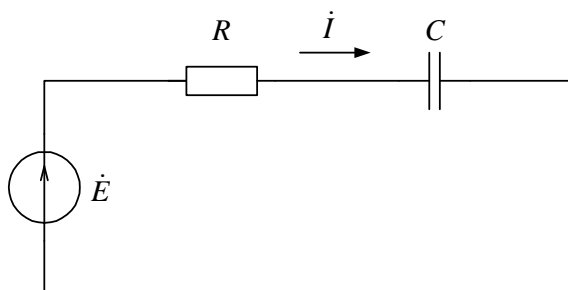
Dots:

$$R = 4\Omega$$

$$\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$E = 10 \text{ mV}$$

$$\dot{I} = 2 \text{ mA}$$



3.20.att. **Shēma**

Lai noteiktu kondensatora kapacitāti ir nepieciešams zināt elektriskās ķēdes pilno pretestību,

$$Z = R - \frac{j}{\omega C} \quad (3.89)$$

Konkrētajā gadījumā pilnās pretestības moduli var izteikt ar sakarību,

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (3.90)$$

Pēc Oma likuma var aprēķināt dotās shēmas pilno pretestību z ,

$$I = \frac{E}{z}; \quad z = \frac{E}{I} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 5\Omega$$

Ja ir zināma pilnā pretestība, tad var aprēķināt reaktīvo pretestības komponenti X , konkrētajā gadījumā tā ir kapacitatīvā pretestība X_c ,

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\Omega$$

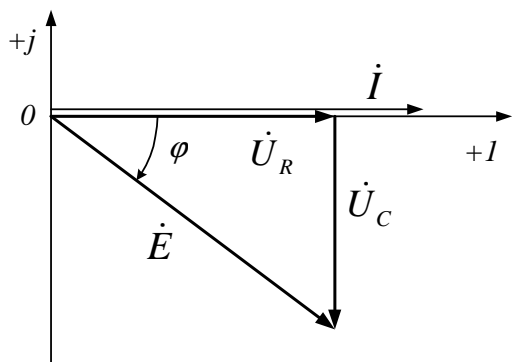
Tālāk var noskaidrot kondensatora kapacitāti C ,

$$C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{10^5 \cdot 3} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Lai uzkonstruētu vektoru diagrammu (3.21.att.), jāaprēķina spriegumi,

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 8 \cdot 10^{-3} V ;$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-j3) = -j6 \cdot 10^{-3} V$$



3.21.att. **Vektoru diagramma**

Piemērs

Konstruēt topogrāfisko vektoru diagrammu shēmai (3.22.att.).

Dots: $I_1 = 1A$

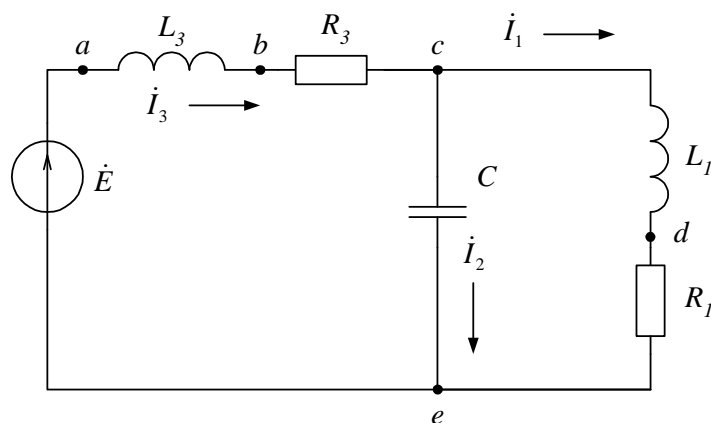
$R_1 = 10\Omega$

$\frac{1}{\omega C} = 14,1\Omega$

$R_3 = 2,5\Omega$

$\omega L_1 = 10\Omega$

$\omega L_3 = 20\Omega$



3.22.att. **Shēma**

Pieņemam mērogu ($m_I = 0,5A/cm$ – strāvai; $m_U = 4V/cm$ – spriegumam) (3.23.att., 3.24.att.) un paralēli analītiskajiem aprēķiniem, konstruēsim vektoru diagrammu. To parasti sāk zīmēt no mezglu punkta ar vismazāko sprieguma potenciālu, šoreiz tas ir punkta e (3.22.att.).

Ir dota strāva \dot{I}_1 . Aprēķinām sprieguma kritumu uz pretestības R_1 ,

$$\dot{U}_{R_1} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = 1 \cdot 10 = 10V$$

Aktīvais spriegums \dot{U}_{R_1} sakrīt fāzē ar strāvu \dot{I}_1 .

Aprēķinām sprieguma kritumu uz induktivitātes L_1 ,

$$\dot{U}_{L_1} = \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1 = 1 \cdot j10 = j10V$$

Induktīvais spriegums \dot{U}_{L_1} apsteidz strāvu \dot{I}_1 fāzē par 90° .

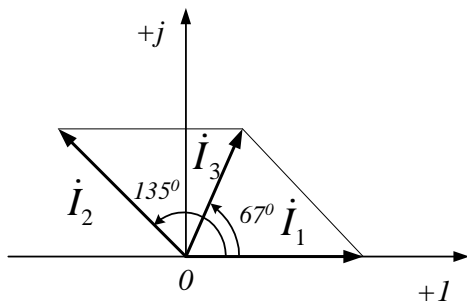
Spriegumus ģeometriski summējam un iegūstam spriegumu starp mezglu punktiem c un e ,

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ce} &= \dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} = 10 + j10 = \\ &= \sqrt{10^2 + 10^2} e^{j \arctg \frac{10}{10}} = 14,1 e^{j45^\circ} V \end{aligned}$$

Ja ir zināms spriegums \dot{U}_{ce} , tad var aprēķināt strāvu \dot{I}_2 ,

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ce}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{14,1 e^{j45^\circ}}{-j14,1} = \frac{14,1 e^{j45^\circ}}{14,1 e^{-j90^\circ}} = 1 e^{j135^\circ} A$$

Strāva \dot{I}_2 ir kapacitatīva, tā apsteidz spriegumu \dot{U}_{ce} par 90° .



3.23.att. **Strāvu vektoru diagramma**

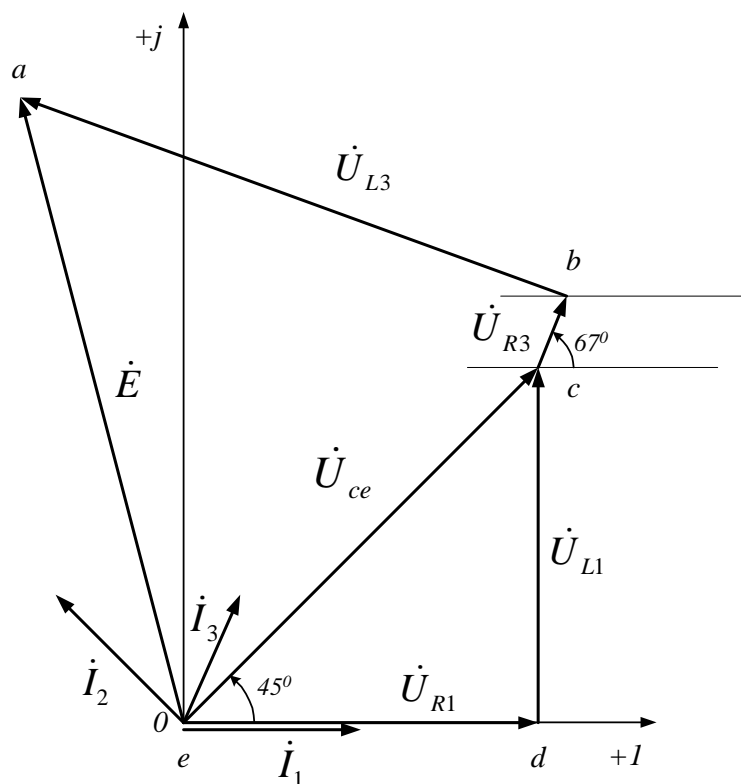
Izteiksim strāvas vērtību algebriskā formā.

$$\dot{I}_2 = 1e^{j135^\circ} = 1 \cdot \cos 135^\circ + j1 \cdot \sin 135^\circ = -0,707 + j0,707$$

Izmantojot 1 Kirhofa likumu, var aprēķināt mezgla punktā c pienākošo strāvu

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1 + (-0,707 + j0,707) = 0,293 + j0,707 = 0,765e^{j67,49^\circ} \text{ A}$$

Strāvu summu grafiski atspoguļojam ar strāvu vektoru diagrammu (3.23.att.).



3.24.att. Topogrāfiskā vektoru diagramma

Strāva \dot{I}_3 plūst caur aktīvo pretestību R_3 un induktivitāti L_3 , sprieguma kritumu uz šiem elementiem var aprēķināt,

$$\dot{U}_{R_3} = \dot{I}_3 R_3 = 0,765e^{j67,49^\circ} \cdot 2,5 = 1,91e^{j67,49^\circ} \text{ V} = 0,731 + j1,765$$

Spriegums \dot{U}_{R_3} sakrīt fāzē ar strāvu \dot{I}_3 .

$$\dot{U}_{L_3} = \dot{I}_3 j\omega L_3 = 0,765e^{j67,49^\circ} \cdot j20 = 15,3e^{j157,49^\circ} \text{ V} = -14,32 + j5,93$$

Induktīvais spriegums \dot{U}_{L_3} apsteidz strāvu \dot{I}_3 fāzē par 90° .

Sasummējot aprēķinātos spriegumus, var noteikt shēmai pieslēgto elektrodzinējspēku,

$$\dot{E} = \dot{U}_{ce} + \dot{U}_{R_3} + \dot{U}_{L_3}$$

$$\dot{E} = 10 + j10 + 0,731 + j1,765 - 14,32 + j5,93 = -3,59 + j17,69 = 18,1e^{j101,47^\circ} \text{ V}$$

3.17. Potenciālu starpības attēlošana kompleksajā plaknē

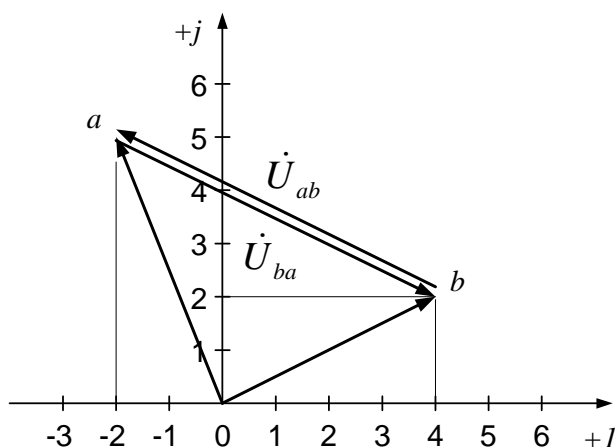
Mainstrāvas ķēžu aprēķinos, izmantojot simbolisko metodi, potenciāls tiek apzīmēts ar komplekso skaitli. Potenciālus kompleksajā plaknē var attēlot ar punktiem, vai vektoriem, kuri vērsti no koordinātu sākuma punkta uz potenciāla punktu. Punktu a un b potenciāli atbilst šo punktu koordinātēm kompleksajā plaknē, potenciālus ϕ_a un ϕ_b apzīmēsim ar vektoriem,

$$\dot{\phi}_a = -2 + 5j \quad \dot{\phi}_b = 4 + 2j .$$

Potenciālu vektoru starpība ir spriegums (3.25.att.),

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = -6 + 3j$$

$$\dot{U}_{ba} = -\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a = 6 - 3j$$



3.25.att. Potenciālu starpības attēlošana kompleksajā plaknē

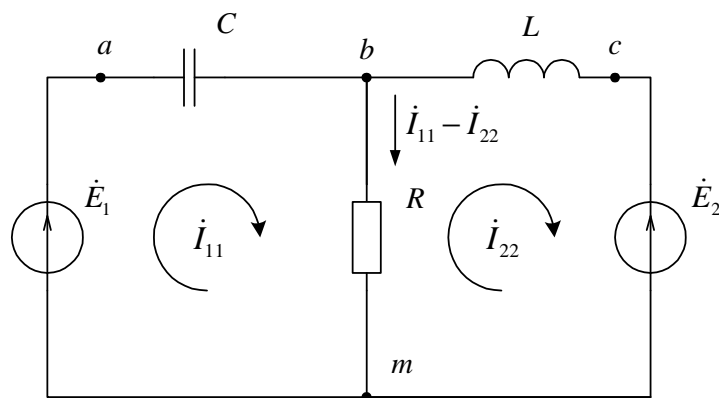
Sprieguma \dot{U}_{ab} vektora smaile ir vērsta pirmā potenciāla ϕ_a virzienā, no kura tiek atņemts otrais potenciāls ϕ_b .

Piemērs Konstruēt topogrāfisko diagrammu, parādīt punktu potenciālus.

Dots:

$$\dot{E}_1 = 100 \text{ V} \qquad X_c = \frac{1}{\omega C} = 2 \Omega$$

$$\dot{E}_2 = 100 e^{j90^\circ} \text{ V} \qquad R = \omega L = 5 \Omega$$



3.26.att. **Shēma**

Aprēķiniem izmantosim kontūrstrāvu metodi, skat. 2.6. nodaļu. Izvēlēsimies kontūru apsekošana pozitīvo virzienu. Uzrakstīsim vienādojumus divu kontūru shēmai (3.26.att.),

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} Z_{11} + \dot{I}_{22} Z_{12} &= \dot{E}_{11} \\ \dot{I}_{11} Z_{21} + \dot{I}_{22} Z_{22} &= \dot{E}_{22} \end{aligned} \qquad (3.91)$$

Nosakām kontūru pilnās kompleksās pretestības,

$$Z_{11} = R - \frac{j}{\omega C} = 5 - 2j; \qquad Z_{22} = R + j\omega L = 5 + 5j$$

Nosakām starpkontūru pretestību, to ņemam ar mīnusa „-” zīmi,

$$Z_{12} = Z_{21} = -R = -5$$

Nosakām kontūru elektrodzinējspēku summas,

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1 = 100; \qquad \dot{E}_{22} = -\dot{E}_2 = -100j$$

Ievietojam sakarībā (3.91) un rezultātā iegūstam,

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11}(5 - 2j) - 5\dot{I}_{22} &= 100 \\ -5\dot{I}_{11} + \dot{I}_{22}(5 + j5) &= -100j \end{aligned}$$

Vienādojumu sistēmu var atrisināt izmantojot Krāmera formulas,

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

kur,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (5-2j) & -5 \\ -5 & (5+5j) \end{vmatrix} = 10 + 15j = 18e^{j56^\circ 20'}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & -5 \\ -100j & (5+5j) \end{vmatrix} = 500$$

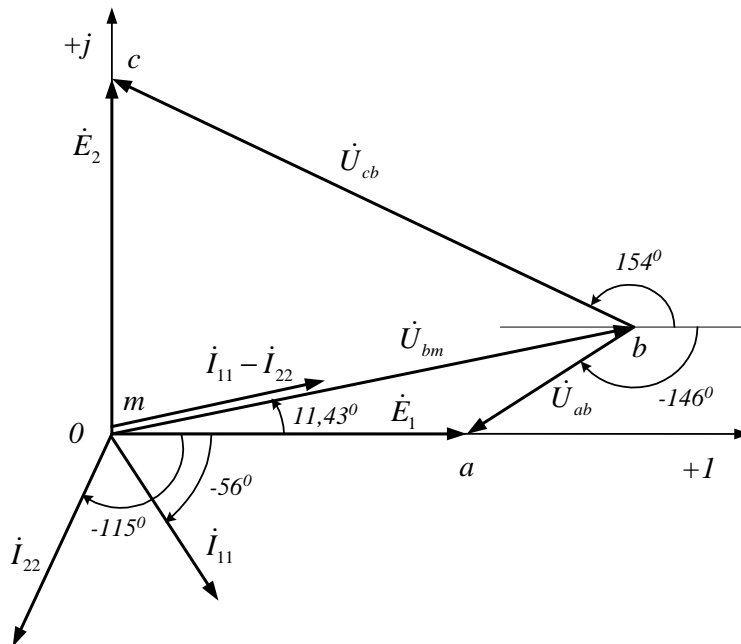
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (5-2j) & 100 \\ -5 & -100j \end{vmatrix} = 300 - 500j = 582e^{-j59^\circ}$$

Aprēķinām strāvas,

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{500}{18e^{j56^\circ 20'}} = 27,8e^{-j56^\circ 20'} \text{ A}$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{582e^{-j59^\circ}}{18e^{j56^\circ 20'}} = 32,3e^{-j115^\circ 20'} \text{ A}$$

$$\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 30e^{j11^\circ 43'} \text{ A}$$



3.27.att. Topogrāfiskā diagramma

Kad ir zināmas strāvas, varam aprēķināt spriegumus starp punktiem. Pēc otrā Kirhofa likuma uzrakstām vienādojumus abiem kontūriem.

$$\dot{U}_{bm} + \dot{U}_{ab} = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_{bm} + \dot{U}_{cb} = \dot{E}_2$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_{11} \cdot (-jX_C) = 27,8e^{-j56,20^\circ} \cdot (-j2) = 55,6e^{-j146,20^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{bm} = (\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}) \cdot R = 30e^{j11,43^\circ} \cdot 5 = 150e^{j11,43^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{cb} = -\dot{I}_{22} \cdot jX_L = -32,3e^{-j115,20^\circ} \cdot j5 = 161,5e^{j154,80^\circ} \text{ V}$$

Zīmējam topogrāfisko diagrammu (3.27.att.). Sākam zīmēt no punkta m. Atliekam abus *EDS*, tad spriegumu \dot{U}_{bm} , kas pēc būtības atbilst φ_b potenciālam. Zīmējam spriegumus \dot{U}_{ab} un \dot{U}_{cb} , tie veido noslēgtu diagrammu. Potenciālam φ_a atbilst \dot{E}_1 , potenciālam φ_c atbilst \dot{E}_2 .

3.18. Aktīvā un reaktīvā un pilnā jauda

Aktīvā jauda *P* ir vidējā momentānā jaudas vērtība periodā *T*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \quad (3.92)$$

Ievietojot iepriekšējā sakarībā funkcijas, kas apraksta momentāno strāvu un momentāno spriegumu,

$$i = I_m \sin \omega t; \quad u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

iegūstam,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (3.93)$$

$$P = UI \cos \varphi \quad (3.94)$$

Aktīvā jauda proporcionāla laika vienībā uz pretestības R izdalītajam siltumam (siltuma izdalīšanās ātrums), mēra *vatos*, W .

$$P = I^2 R \quad [\text{W}] \quad (3.95)$$

Reaktīvā jauda $Q = UI \sin \varphi \quad [\text{VAr}] \quad (3.96)$

- ja $\sin \varphi > 0$ $Q > 0$, reaktīvā jauda ir induktīva, ar „+”, zīmi;
- ja $\sin \varphi < 0$ $Q < 0$, reaktīvā jauda ir kapacitatīva, ar „-”, zīmi.

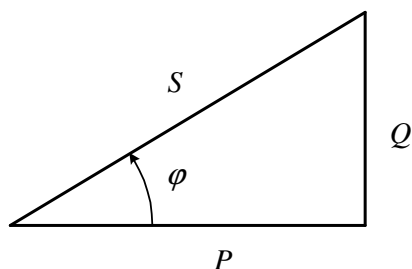
Reaktīvā jauda veidojas uz L un C tā raksturo enerģiju, ar kuru apmainās patērētājs un avots. Kondensators pārlādējas, induktivitāte pārmagnetizējas, bet darbu nedara. Reaktīvo jaudu mēra *reaktīvajos voltampēros*, VAr .

Pilnā jauda (šķietamā) $S = UI \quad [\text{VA}] \quad (3.97)$

Parasti barošanas avotam - transformatoram, ģeneratoram uzrāda pilno jaudu S , to mēra *voltampēros*, VA .

Ja avotu slodži ar aktīvo slodzi R un jaudas koeficients $\cos \varphi = 1$, tad avots atdos pilno jaudu S , kura ir vienāda ar aktīvo jaudu P .

Aktīvā, reaktīvā un pilnā jauda veido taisnleņķa trīsstūri - *jaudas trīsstūri*,



$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (3.98)$$

3.28.att. **Jaudas trīsstūris**

Aprēķinos izmantojot simbolisko metodi, ir izdevīgi jaudas aprēķinus veikt kompleksā formā. Ja ir aprēķināts komplekss, kas sastāv no sprieguma $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ un strāvas $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$, tad leņķis starp strāvu un spriegumu $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Lai to ievērtētu, jaudas

aprēķinos lieto strāvas kompleksu $I^* = Ie^{-j\psi_i}$, kur nobīdes leņķim ψ_i zīmi nomaina uz pretējo. Pilno komplekso jaudu aprēķina ar sakarību,

$$S = \dot{U} \cdot I^* = U \cdot Ie^{j(\psi_u - \psi_i)} = U \cdot Ie^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ \quad (3.99)$$

Aktīvā jauda ir kompleksa reālā daļa, to aprēķina šādi,

$$P = \text{Re}(\dot{U} \cdot I^*) = \text{Re}(U \cdot Ie^{j(\psi_u - \psi_i)}) = \text{Re}(U \cdot Ie^{j\varphi}) = UI \cos \varphi \quad (3.100)$$

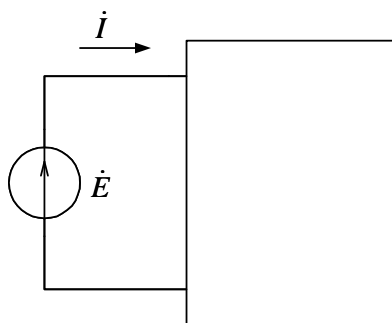
Reaktīvā jauda ir kompleksa imaginārā daļa, to aprēķina,

$$Q = \text{Im}(\dot{U} \cdot I^*) = \text{Im}(U \cdot Ie^{j(\psi_u - \psi_i)}) = \text{Im}(U \cdot Ie^{j\varphi}) = UI \sin \varphi \quad (3.101)$$

3.19. Divpols maiņstrāvas ķēdē

Pasīvs divpols ir shēma, kura sastāv no *RLC* slēguma un tam ir divi izvadi. Tas var būt shēmas posms, aparāts, atsevišķs patērētājs, divvadu līnijas zars ar slodzi utt.

Divpolam parasti nosaka *ieejas pretestību*. Mēra strāvu I un spriegumu U .



3.29.att. Divpols

Var aprēķināt ieejas pretestības moduļa vērtību z ,

$$z = \frac{U}{I} \quad (3.102)$$

Ja divpolam izmēra aktīvo jaudu, ir iespējams noteikt jaudas koeficientu.

$$P = UI \cos \varphi \quad (3.103)$$

$$\frac{P}{UI} = \cos \varphi \quad (3.104)$$

Ja zināms $\cos \varphi$ var noteikt divpola ieejas pretestības aktīvo un reaktīvo komponenti.

$$R_{ie} = z \cos \varphi \quad (3.105)$$

$$X_{ie} = z \sin \varphi \quad (3.106)$$

Ja nav zināms, kāda rakstura reaktīvā slodze ir divpolam, induktīva, vai kapacitatīva, to var noskaidrot eksperimentāli. Divpola ieejai jāpieslēdz nelielas kapacitātes kondensatoru, ja patērētā strāva palielinās, divpols ir kapacitatīvs, ja samazinās, induktīvs.

Divpola rezonanses režīms

Ja divpols satur L un C ar *rezonanses režīmu* saprot, tādu režīmu, pie kura divpola ieejas pretestība ir tikai aktīvā, neņemot vērā induktivitātei esošo aktīvās pretestības komponenti.

L un C rezonanses gadījumā darbojas kā aktīvā pretestība, strāva un spriegums sakrīt fāzē, reaktīvā jauda vienāda ar 0,

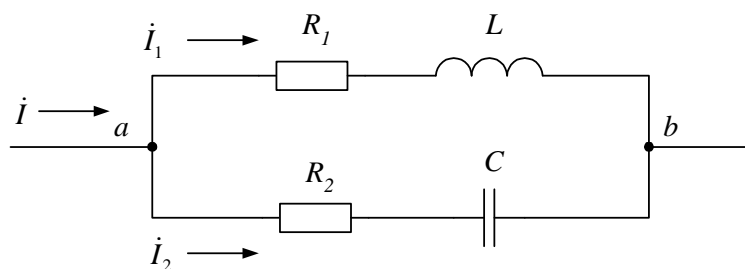
$$Q = 0 \quad (3.107)$$

Ir divu veidu rezonanse, *strāvas rezonanse* un *sprieguma rezonanse*.

Rezonanse var būt noderīga, piemēram, vājstrāvu ķēdēs, radiotehnikā, elektronikā, var būt bīstama un kaitīga, lielu strāvu ķēdēs.

3.20. Strāvas rezonanse

Strāvas rezonanse ir iespējama ķēdei ar paralēliem zariem, kas satur pretēja rakstura reaktīvus elementus, L un C .



3.30.att. Ķēdes posms ar paralēliem zariem

Dotajā ķēdei (3.30.att.) ir divi paralēli zari:

- pirmais ir induktīva rakstura, kas sastāv no pretestībām $R_1; \omega L$;
- otrais ir kapacitatīvs, sastāv no pretestībām $R_2; \frac{1}{\omega C}$.

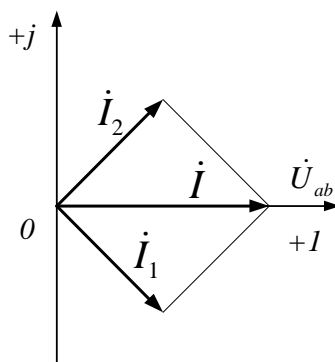
Shēmā ir paralēli zari, tāpēc zaru strāvas \dot{I}_1 un \dot{I}_2 izteiksim ar vadītspēju,

$$\dot{I}_1 = \dot{U}Y_1 = \dot{U}(g_1 - jb_1) \quad (3.108)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}Y_2 = \dot{U}(g_2 - jb_2)$$

Pamatojoties uz pirmo Kirhoha likumu, var rakstīt,

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}(g_1 + g_2) - j\dot{U}(b_1 + b_2) \quad (3.109)$$



3.31.att. Strāvas rezonances vektoru diagramma.

Pēc rezonances nosacījuma \dot{I} sakrīt ar \dot{U}_{ab} . Tas būs tad, kad reaktīvo vadītspēju b

summa būs vienāda ar 0, $\sum b = 0$

$$b_1 + b_2 = 0 \quad (3.110)$$

Reaktīvo vadītspējas komponenti b izsaka sakarība (3.75),

$$b = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Reaktīvās vadītspējas komponentes shēmas zariem var izteikt,

$$b_1 = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \quad (3.111)$$

$$b_2 = -\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad (3.112)$$

Strāvas rezonanses nosacījums ir,

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (3.113)$$

Strāvas rezonanses nosacījumu var apskatīt dažādiem gadījumiem:

- Ja $R_2 = 0$, kondensatoram virknē nav R , rezonanses nosacījumu var uzrakstīt,

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \omega C \quad (3.114)$$

- Ja $R_2 = 0$ un arī $R_1 \ll \omega L$, spolei ļoti maza iekšējā pretestība $R_{iekš}$, rezonanses nosacījumu var uzrakstīt,

$$\omega^2 LC \approx 1 \quad (3.115)$$

Strāvas rezonansi ķēdei var panākt izmainot R_1, R_2, ω, L, C .

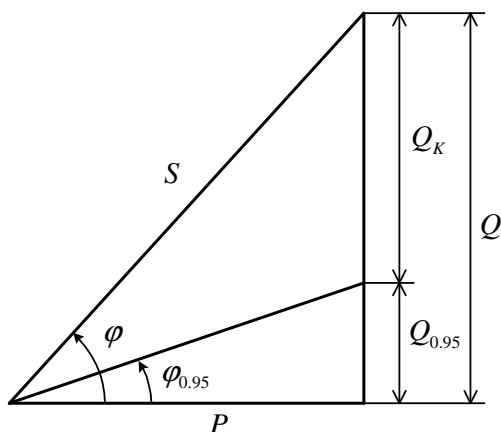
Teorētiski, ja $R_2 = R_1 = 0$ un ir rezonanse, strāva I tiecas uz 0, tā ir daudzkārt mazāka par I_1 un I_2 . Ja ķēdei ir strāvas rezonanse, $\cos \varphi = 1$.

3.21. Fāzu nobīdes kompensācija

Bez induktīvās reaktīvās jaudas patēriņa nestrādā neviena elektriskā mašīna, kurai ir tinums. Induktīvā reaktīvā jauda slogo tīklu un ģeneratoru ar reaktīvo strāvu, samazinot aktīvās jaudas daļu, ko varētu paņemt no tīkla. Neapšaubāmi reaktīvās strāvas elektropārvadē un iekārtās rada papildus aktīvās jaudas zudumus, jo sakarību $P_{zud} = I^2 \cdot R_{lin}$ apiet nav iespējams. Tāpēc ir nepieciešams lokalizēt reaktīvo strāvu un

to samazināt tīklā. Viens no reaktīvās strāvas lokalizēšanas paņēmieniem ir reaktīvās jaudas kompensēšana. Paralēli induktīvajai slodzei slēdz kondensatoru baterijas, kuru radītā reaktīvā kapacitatīvā jauda darbojas pretfāzē (ar fāžu nobīdi 180^0) induktīvajai reaktīvajai jaudai, un to kompensē.

Parasti cenšas reaktīvo induktīvo jaudu kompensēt uz $\cos \varphi = 0,95$.



3.32.att. **Reaktīvās jaudas kompensēšana**

Fāžu nobīdes kompensācijas principu var izskaidrot ar jaudas trīsstūri (3.32.att.). Shēma bez fāžu nobīdes kompensācijas, attīsta aktīvo jaudu P , patērē reaktīvo jaudu Q , fāžu nobīdes leņķis ir, $\varphi = \arccos \cos \varphi$. Nepieciešams $\cos \varphi = 0,95$, šai gadījumā fāžu nobīdes leņķis ir,

$$\varphi_{0,95} = \arccos 0,95 = 18,19^0 \quad (3.116)$$

Kompensējamā reaktīvā jauda ir,

$$Q_K = P(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_{0,95}) \quad (3.117)$$

Noteiksim kādu kondensatoru jāpieslēdz paralēli shēmai, lai nodrošinātu Q_K . No kompensējamās reaktīvās jaudas aprēķina sakarības var izteikt sakarību kompensējamās reaktīvās pretestības aprēķinam,

$$Q_K = I_K \cdot U \quad (3.118)$$

ievietojam

$$I_K = \frac{U}{X_K}, \quad (3.119)$$

iegūstam sakarību,

$$Q_K = \frac{U^2}{X_K}. \quad (3.120)$$

Izsakām reaktīvo kompensējamo pretestību ,

$$X_K = \frac{U^2}{Q_K}. \quad (3.121)$$

Reaktīvo kompensējamo pretestību aprēķina arī pēc sakarības,

$$X_K = \frac{1}{2\pi f C_K} \quad (3.122)$$

No iepriekšējās izteiksmes izsakām kondensatora kapacitāti,

$$C_K = \frac{1}{2\pi f X_K} \quad (3.123)$$

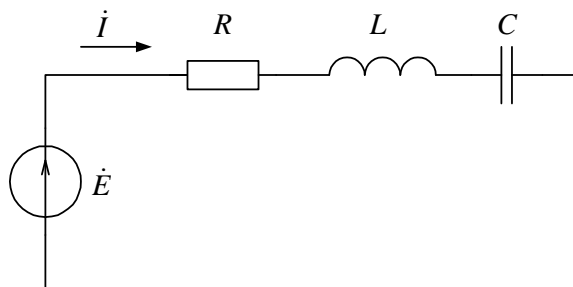
Ievietojam izteiksmi (3.121) izteiksmē (3.123) un iegūstam fāžu nobīdes kompensācijas kondensatora aprēķina sakarību,

$$C_K = \frac{Q_K}{2\pi f U^2} \quad (3.124)$$

Fāžu nobīdes aprēķinus līdzīgi kā ar jaudām, var veikt arī ar strāvām, rēķinot kompensējamo reaktīvo strāvu I_K .

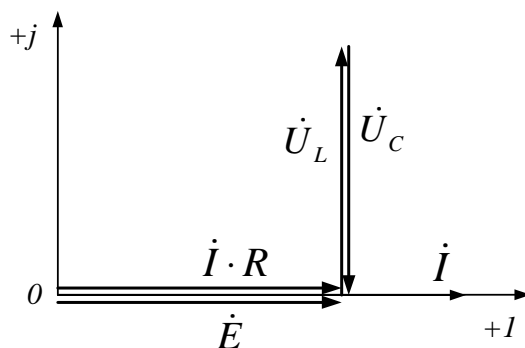
3.22. Sprieguma rezonanse

Sprieguma rezonanse ir iespējama RLC virknes slēgumam.



3.33.att. RLC virknes slēgums

Rezonanses gadījumā sakrīt strāvas \dot{I} un elektrodzinējspēka \dot{E} vektoru virziens.



3.34.att. **Sprieguma vektoru diagramma rezonansei**

Rezonanses gadījumā ķēdes pilnā pretestība būs tikai aktīvā

$$z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

no tā izriet *rezonanses nosacījums*,

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (3.125)$$

Rezonanses strāvu ķēdē ierobežos tikai aktīvā pretestība R ,

$$I_{rez} = \frac{E}{R} \quad (3.126)$$

Spriegums uz induktivitātes un kapacitātes rezonanses gadījumā ir vienādi un tos apraksta sakarība,

$$U_L = U_C = \omega LI = \frac{\omega L}{R} E \quad (3.127)$$

Rezonanses kontūra labums Q ,

$$\frac{\omega L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = Q \quad (3.128)$$

Kontūra labums parāda cik reizes spriegums uz induktivitātes un kapacitātes pārsniedz shēmas ieejas spriegumu rezonanses režīmā. Q var būt liels, līdz pat 300.

3.23. RLC virknes slēguma darbības pētījumi

Apskatīsimies, kā mainās $I; U_L; U_C$ shēmai (3.33.att.), ja maina leņķisko frekvenci ω , pie nosacījuma, ka RLC un E ir konstanti.

Strāva ķēdē ,
$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3.129)$$

Reaktīvā pretestība,
$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (3.130)$$

Leņķiskā frekvence	Reaktīvā pretestība	Strāva
$\omega \rightarrow 0$	$X \rightarrow -\infty$	$I \rightarrow 0$
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$X = 0$	$I = \frac{E}{R}$
$\omega \rightarrow \infty$	$X \rightarrow \infty$	$I \rightarrow 0$

Induktīvo un kapacitatīvo spriegumu var aprēķināt,

$$U_L = \omega LI, \quad (3.131)$$

$$U_C = I \frac{1}{\omega C} \quad (3.132)$$

$U_L = \omega LI$	$\omega \rightarrow 0$	$U_L = 0$
	$\omega \rightarrow \infty$	$U_L \rightarrow E$
$U_C = I \frac{1}{\omega C}$	$\omega \rightarrow 0$	$U_C \rightarrow E$
	$\omega \rightarrow \infty$	$U_C \rightarrow 0$

Praktiski $U_{C_{\max}}$ un $U_{L_{\max}}$ nav pie rezonanses frekvences ω_r !

Rezonanses frekvenci virknes slēgumam nosaka sakarība

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.133)$$

Maksimālais spriegums uz induktivitātes $U_{L_{\max}}$ nav pie rezonanses frekvences, bet pie ω_L , kas ir lielāka nekā ω_r .

$$\omega_L = \omega_r \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 C}{L}}} \quad (3.134)$$

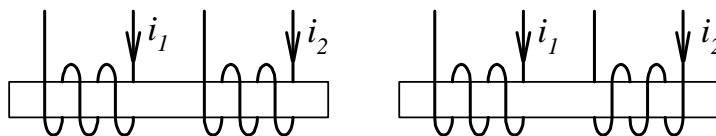
Maksimālais spriegums uz kapacitātes $U_{C_{\max}}$ ir pie frekvences ω_C , kas ir mazāka par rezonanses frekvenci ω_r .

$$\omega_C = \frac{\omega_r^2}{\omega_L} \quad (3.135)$$

3.24. Virknes slēgums magnētiski saistītām spolēm

Vienas spoles radītās magnētiskās spēka līnijas šķeļ otrā spoles tinumu un inducē *EDS* otrā spolē un otrādi. Jāzina, vai šīs spoles ir virknē slēgtas saskaņoti vai pretēji, kādā virzienā ir pašindukcijas plūsma.

Ja zināms kādā virzienā ir tīti tinumi un zināmi sākuma gali tinumiem, tad nav problēmu tos saslēgt. Svarīgs ir arī strāvas I plūsmas virziens (3.35.att.).



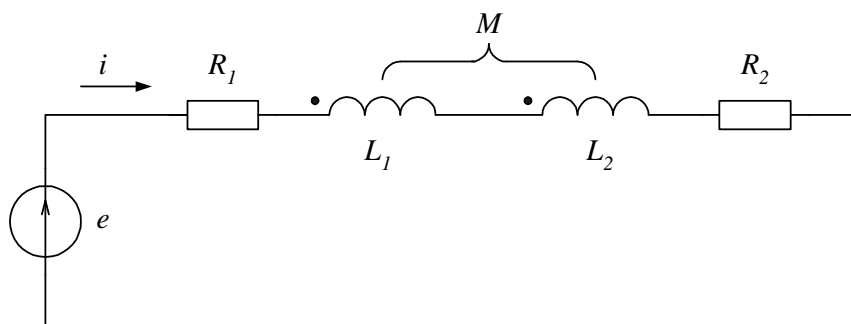
3.35.att. Saskaņoti un pretēji slēgtas magnētiski saistītas spoles

Divām magnētiski saistītām spolēm *saskaņots virknes slēgums* ir tad, ja pirmā tinuma beigu galu savieno ar otra tinuma sākuma galu (3.36.att.).

Pēc otrā Kirhofa likuma varam rakstīt,

$$iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + iR_2 = e \quad (3.136)$$

kur M - mijinduktivitāte, saskaņotā slēgumā abu tinumu mijinduktivitātes sprieguma komponentes ir ar „+” zīmi.



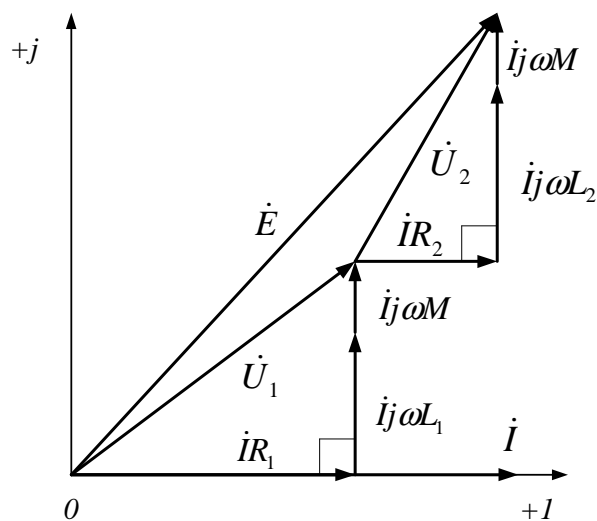
3.36.att. Saskaņots magnētiski saistītu spoļu slēgums

Pārrakstīsim vienādojumu (3.136) kompleksā formā,

$$\dot{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) = \dot{E} \quad (3.137)$$

$$\dot{I}Z_{sask} = \dot{E} \quad (3.138)$$

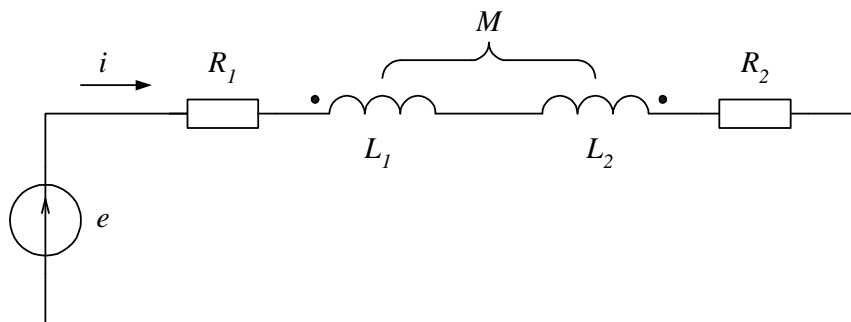
$$Z_{sask} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \quad (3.139)$$



3.37.att. Diagramma saskaņotam magnētiski saistītu spoļu slēgumam

Divām magnētiski saistītām spolēm *pretējs virknes slēgums* ir tad, ja savieno pirmā un otrā tinuma beigu vai sākuma galus (3.38.att.).

Magnētiski saistīto spoļu pretējam slēgumam abos tinumos inducētais mijinduktivitātes spriegums ir ar „-” zīmi,



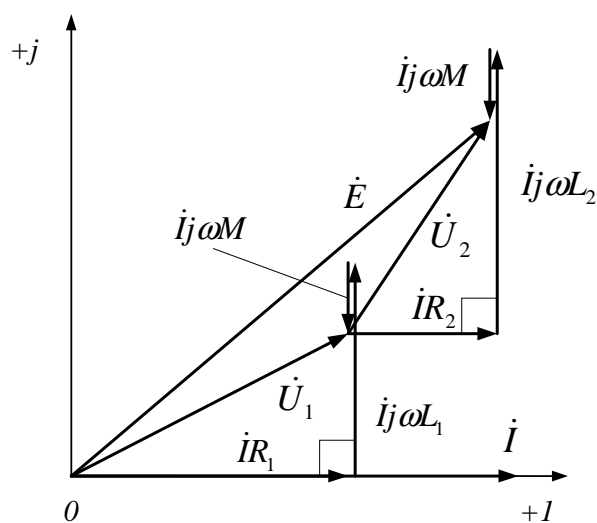
3.38.att. Pretēji slēgtas magnētiski saistītas spoles

$$iR_1 + L \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + iR_2 = e \quad (3.140)$$

$$\dot{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)) = \dot{E} \quad (3.141)$$

$$Z_{pret} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) \quad (3.142)$$

$$\dot{I}Z_{pret} = \dot{E} \quad (3.143)$$



3.39.att. Diagramma pretējam magnētiski saistītu spoļu slēgumam

3.25. Mijinduktivitātes M noteikšana

Ir divi paņēmieni, kā noskaidrot mijinduktivitāti M .

Pirmais paņēmieni

Noskaidro reaktīvo pretestību X virknē slēgtiem tinumiem saskaņotā un pretējā slēgumā. Katram slēgumam mēra $I; U; P$ un aprēķina X_{sask} un X_{pret} .

$$X_{sask} = \omega(L_1 + L_2 + 2M) \quad (3.144)$$

$$X_{pret} = \omega(L_1 + L_2 - 2M) \quad (3.145)$$

Ja ir zināmas reaktīvās pretestības, var izteikt sakarību mijinduktivitātes aprēķināšanai,

$$X_{sask} - X_{pret} = 4\omega M \quad (3.146)$$

$$M = \frac{X_{sask} - X_{pret}}{4\omega} \quad (3.147)$$

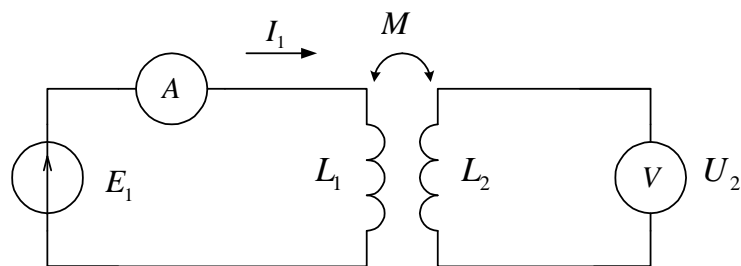
Otrais paņēmieni

Ir nepieciešams zināt primārā tinuma strāvu I_1 un sekundārā tinuma spriegumu U_2 . Tos var izmērīt. Momentālais spriegums sekundārajam tinumam ir,

$$u_2 = M \frac{di}{dt} \quad (3.148)$$

Efektīvo vērtību var izteikt,

$$U_2 = \omega M I_1 \quad (3.149)$$



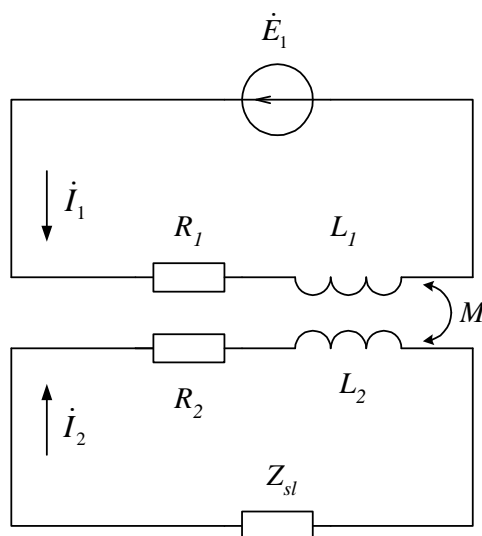
3.40.att. M noteikšana magnētiski saistītām spolēm

Sekundāro spriegumu U_2 jāmēra ar augstomīgu voltmetru. No iegūtajiem mērījumiem var aprēķināt mijinduktivitāti, to mēra Henrijos, H,

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}. \quad (3.150)$$

3.26. Transformators bez serdes

Transformators ir ierīce, kas pārveido maiņstrāvu citā maiņstrāvā, kas atšķiras pēc vērtības. Darbība pamatojas uz savstarpējo indukciju.



3.41.att. Transformators

Pēc Otrā Kirhofa likuma primārajam tinumam var uzrakstīt vienādojumu,

$$\dot{I}_1 \dot{R}_1 + \dot{I}_1 j\omega L_1 + I_2 j\omega M = \dot{E}_1 \quad (3.151)$$

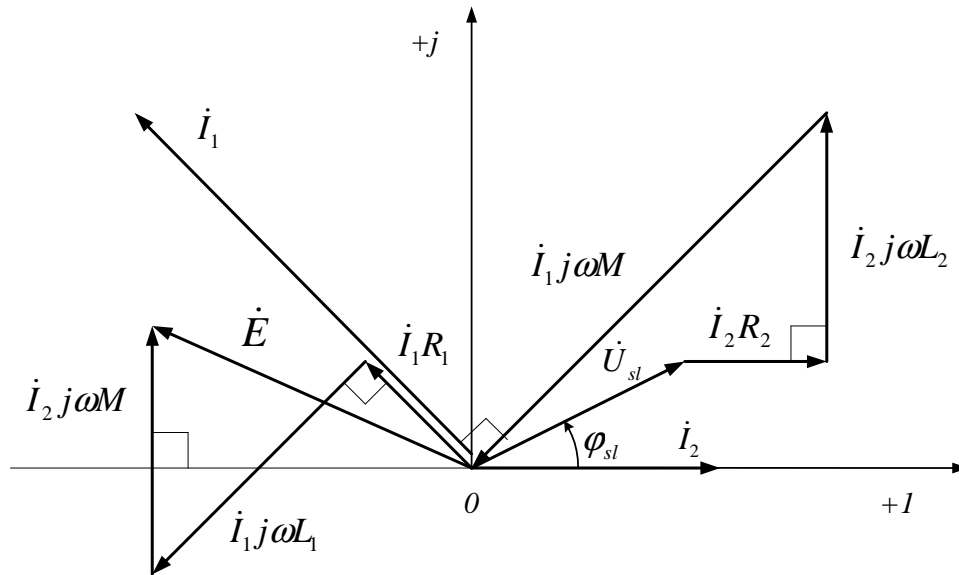
Sekundārajam tinumam vienādojums būs šāds,

$$\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{I}_1 j\omega M + \dot{U}_{sl} = 0 \quad (3.152)$$

Strāva \dot{I}_1 atpaliek no vektora $\dot{I}_1 j\omega M$ par 90° , šim vektoram ir induktīvs raksturs.

$$\dot{U}_{sl} = \dot{I}_2 Z_{sl} \quad (3.153)$$

Apskatītajā variantā transformatoram pieslēgta induktīva rakstura slodze Z_{sl} .



3.42.att. Transformatora vektoru diagramma

Vektors $\dot{I}_2 j\omega M$ apsteidz \dot{I}_2 par 90° .

3.27. Aktīvās un reaktīvās jaudas balanss

Jebkurā lineārā elektriskā ķēdē aktīvās jaudas avotu summa ir vienāda ar patērētāju summu, reaktīvās jaudas avotu summa ir vienāda ar reaktīvās jaudas patērētāju summu.

$$\sum U_{gen} I_{gen} \cos \varphi = \sum R \cdot I_R^2 \quad (3.154)$$

$$\sum P_{gen} = \sum P_{pat} \quad (3.155)$$

$$\sum U_{gen} I_{gen} \sin \varphi = \sum X_L \cdot I_L^2 - \sum X_C \cdot I_L^2 \quad (3.156)$$

$$\sum Q_{gen} = \sum Q_L - \sum Q_C \quad (3.157)$$

Jebkurā momentā algebriskā summa momentānajai avota atdotajai jaudai ir vienāda ar patērētāja momentāno jaudu.

4. TRĪSFĀŽU MAINSTRĀVAS ĶĒDES

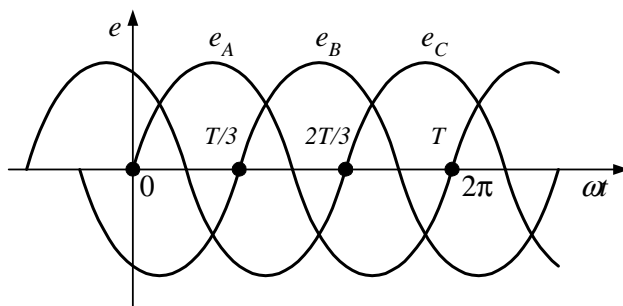
4.1. Trīsfāžu barošanas avots

Trīsfāžu barošanas avots sastāv no trīs sinusoidāla EDS avotiem, kas darbojas ar vienu un to pašu frekvenci ω un ir savstarpēji nobīdīti fāzē par 120° .

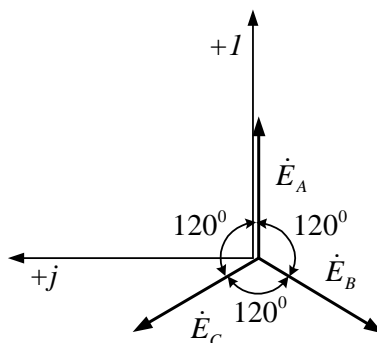
$$e_A = E_m \sin \omega t, \quad (4.1)$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad (4.2)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (4.3)$$



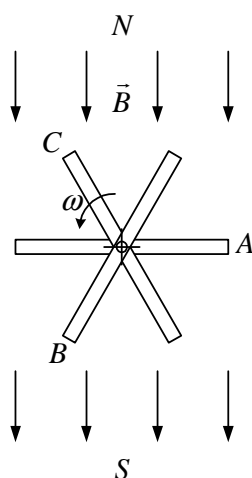
4.1.att. Trīsfāžu maiņstrāvas avota EDS laika diagramma



4.2.att. Trīsfāžu avota EDS vektoru diagramma

Fāžu secība nosaka kādā secībā sinusoīda šķērso „0” līniju. Nosacīti varam iedomāties, ka 4.2. attēlā redzami fāžu *EDS* vektori rotē pretēji pulksteņa rādītāja virzienam un šķērso reālo skaitļu asi +1. Pirmā „0” līniju šķērso fāze A, fāzes nobīdes leņķis $\psi = 0^{\circ}$, otrā fāze B, fāzes nobīdes leņķis $\psi = -120^{\circ}$, trešā fāze C, fāzes nobīdes leņķis $\psi = -240^{\circ}$.

Trīsfāžu maiņstrāvu var iegūt, ja pastāvīgajā magnētiskajā laukā rotē 3 vienādas cieši sastiprinātas spoles, kas izvietotas ar 120° nobīdi vienai pret otru. Katrā spolē inducējas elektrodzinējspēks ar atbilstošu fāzes nobīdi.



4.3.att. **Trīsfāžu maiņstrāvas ģenerators**

Praksē parasti izmanto trīsfāžu ģeneratorus, kuriem tinuma spoles nostiprina nekustīgi statorā, bet liek rotēt pastāvīgajam magnētiskajam laukam.

Trīsfāžu maiņstrāva nav vienīgais tehnikā izmantotais daudzfāžu maiņstrāvas variants. Ir veikti pētījumi par dažādu sistēmu izmantošanu, var būt 2, 4, 5, 6 utt. fāžu sistēmas. Gan ekonomiski, gan tehniski, praktiskākā ir 3 fāžu sistēma.

Trīsfāžu strāvas priekšrocības:

- Ekonomiski izdevīgākā tālai enerģijas pārvadīšanai.
- Vienkārši iegūt rotējošu magnētisko lauku.
- Trīsfāžu transformators, elektrodzinējs (asinchronais) vienkārši un droši.
- Pie simetriskas slodzes sistēmas momentānā jauda sinusoīdas perioda laikā nemainīga.

4.2. Trīsfāžu ķēde un slēgumi

Trīsfāžu ķēde ir sistēma, kas sastāv no trīsfāžu *EDS*, slodzes un savienojošajiem vadiem. Strāvas un spriegumi attiecīgajās fāzēs ir nobīdīti.

Fāze ir ķēdes daļa, kurā plūst viena un tā pati strāva.

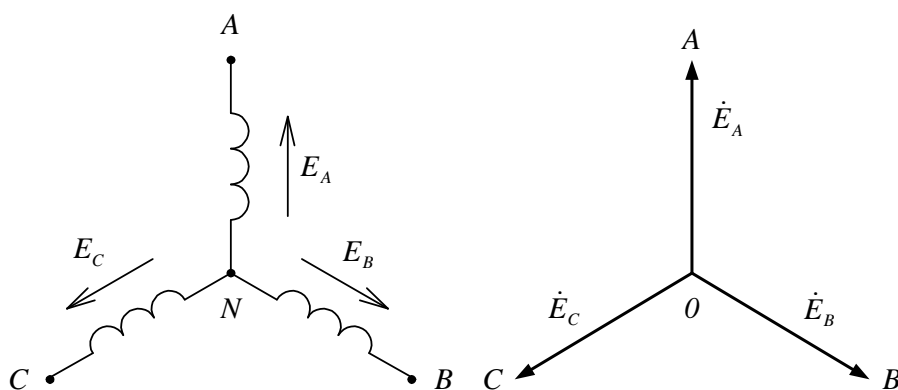
Trīsfāžu ķēžu aprēķiniem var lietot simbolisko metodi. Analītiskos aprēķinus veic vienlaicīgi ar diagrammu zīmēšanu.

Pamatslēgumi

Trīsfāžu ķēdēm izmanto divu veidu slēgumus, *zvaigznes* slēgumu un *trīsstūra* slēgumu. Slēgumu apzīmēšanai lieto grieķu burtus, zvaigznes slēgumam Y , bet trīsstūra slēgumam Δ .

Zvaigznes slēgums

Trīsfāžu ģenerators tinumiem ir sākuma gali un beigu gali. Tinumu sākuma galus apzīmē ar burtiem A, B, C , bet beigu galus ar burtiem X, Y, Z . Veidojot zvaigznes slēgumu, pie tinuma sākuma galiem pieslēdz patērētāja līnijas vadus, tinuma beigu galus savieno vienā punktā N , kuru sauc par *ģenerators neitrāli*. Burtu A liek pie ģenerators pirmās fāzes tinuma sākuma gala, ar burtu B apzīmē otrās fāzes, bet ar C trešās fāzes tinuma sākuma galu.

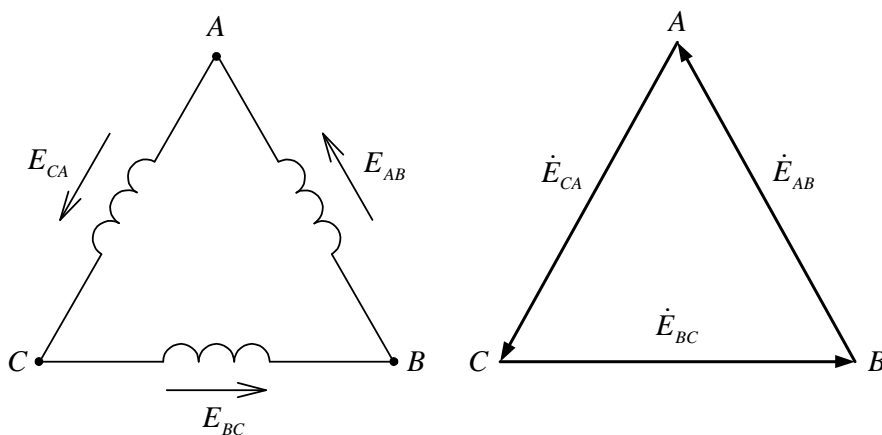


4.4.att. Ģenerators tinumu zvaigznes slēgums, *EDS* vektoru diagramma

Trīsstūra slēgums

Veidojot trīsstūra slēgumu, ģenerators tinuma beigu galam pieslēdz nākošā tinuma sākuma galu. Saskaņoti saslēdzot vienu tinumu aiz otra, iegūstam trīsstūra slēgumu. Virknē saslēgto EDS ģeometriskā summa ir vienāda ar 0. Ja pie savienojuma punktiem A, B, C , netiks pieslēgta slodze, ģenerators tinumos strāva neplūds.

$$\dot{E}_{AB} + \dot{E}_{BC} + \dot{E}_{CA} = 0 \quad (4.4)$$

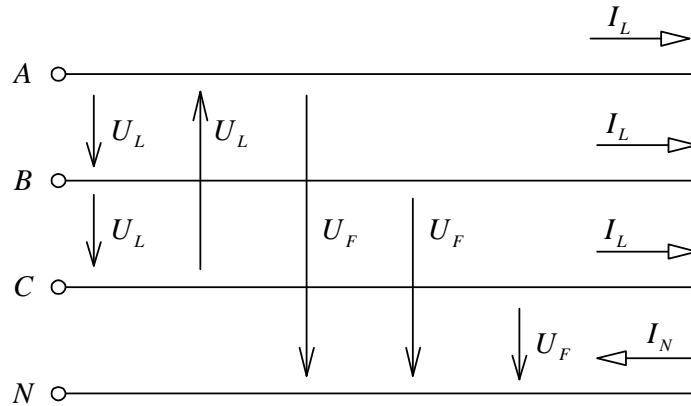


4.5.att. Ģenerators tinumu trīsstūra slēgums, EDS vektoru diagramma

Praksē izmanto dažādas ģenerators un patērētāja slēguma sistēmas, zvaigzne-trīsstūris, zvaigzne-zvaigzne ar *neitrāles* vadu, trīsstūris-trīsstūris, trīsstūris-zvaigzne, zvaigzne-zvaigzne bez neitrāles vada.

4.3. Trīsfāžu sistēmas spriegumi un strāvas

Vadus, kas savieno ģenerators spaiļes A, B, C ar patērētāju, sauc par līnijas vadiem. Līnijas vados plūst *līnijas strāvas* I_A, I_B, I_C . Parasti līnijas strāvu virziens ir no ģenerators uz patērētāju. Attēlā 4.6 ir parādīta četru vadu līnija, kur līnijas strāvas apzīmētas ar I_L . *Līnijas spriegums* U_L ir spriegums starp līnijas A, B, C fāžu vadiem. *Fāzes spriegums* U_F ir spriegums starp fāzi un neitrāli $N, A, N; B, N; C, N$.

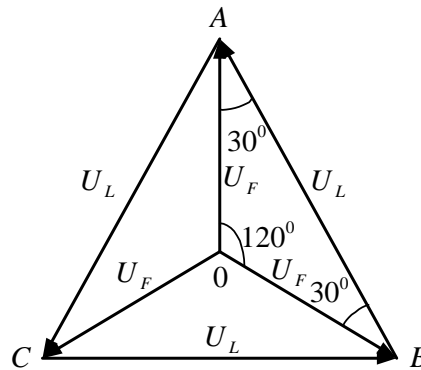


4.6.att. Strāvas un spriegumi četrū vadu sistēmā

Piemērs

Ja mums ir 380V līnija, tad līnijas spriegums $U_L = 380V$, tas nozīmē, ka starp līnijas vadiem A,B; B,C; C,A ir spriegums 380V. Šai gadījumā fāzes spriegums būs $U_F = 220V$, tas ir spriegums starp fāzi un neitrāli N.

Ja mums ir 20kV trīs vadu līnija, tad līnijas spriegums ir $U_L = 20kV$ (praksē nedaudz lielāks, 21kV) un tas ir spriegums starp līnijas vadiem.



4.7.att. Līnijas un fāzes spriegumu vektoru diagramma

Ja ģenerators ir saslēgts zvaigznes slēgumā, tad līnijas spriegums ir $\sqrt{3}$ reizes lielāks par fāzes spriegumu, tas ģeometriski izriet no 4.7. attēlā redzamās diagrammas.

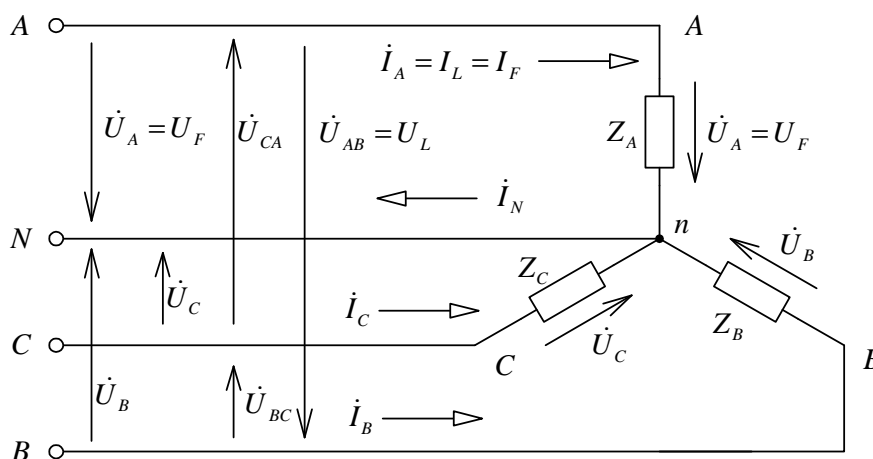
$$U_L = U_{AB} = U_F \cdot 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot U_F . \tag{4.5}$$

Apskatīsim spriegumus un strāvas zvaigznes slēgumam (4.8.att.). A zara fāze ir Z_A , B zara fāze ir Z_B , C zara fāze ir Z_C . Zvaigznes slēgumam līnijas strāva I_L un fāzes strāva I_F sakrīt, ir vienādas,

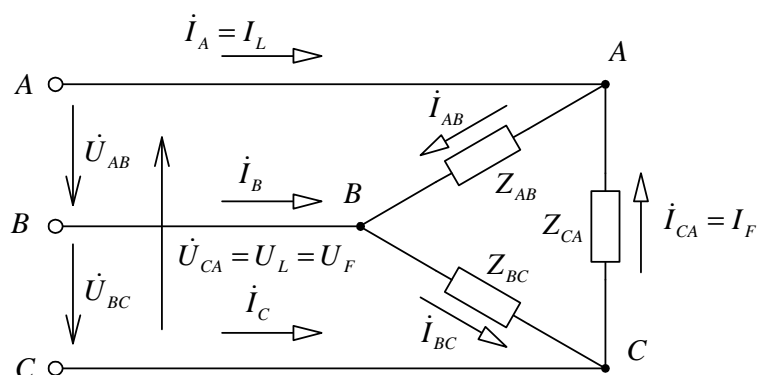
$$I_A = I_L = I_F, \quad (4.6)$$

bet līnijas spriegums ir $\sqrt{3}$ reizes lielāks par fāzes spriegumu,

$$U_L = \sqrt{3}U_F. \quad (4.7)$$



4.8.att. Strāvas un spriegumi zvaigznes slēgumam



4.9.att. Strāvas un spriegumi trīsstūra slēgumam

Trīsstūra slēgumam (4.9.att.) fāzes ir zari starp mezglu punktiem A, B, C . Pirmā fāze AB , ar zaru Z_{AB} , otrā fāze BC , ar zaru Z_{BC} , trešā fāze CA , ar zaru Z_{CA} . Trīsstūra slēgumam līnijas un fāzes spriegumi sakrīt, ir vienādi,

$$U_{AB} = U_L = U_F. \quad (4.8)$$

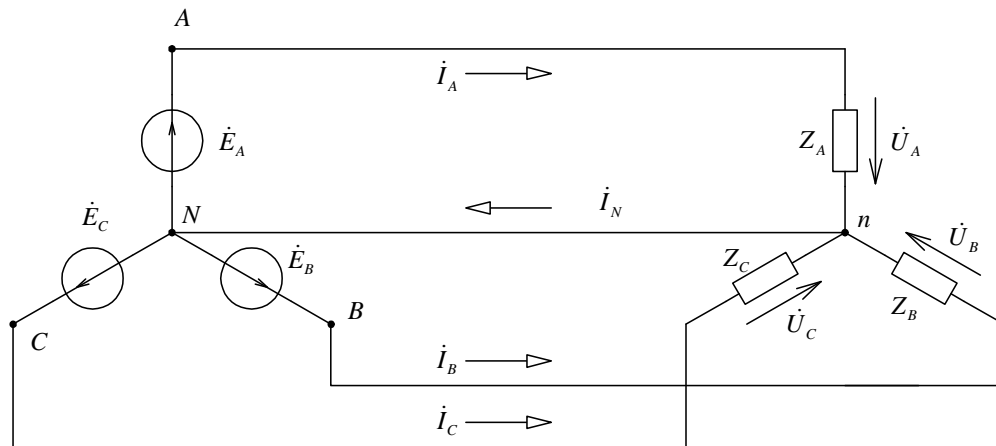
Līnijas strāva $I_A = I_L$ plūst līnijas vadā. Fāzes strāva $I_{CA} = I_F$ plūst fāzes zarā.

Simetriskas slodzes gadījumā, trīsstūra slēguma līnijas strāva ir $\sqrt{3}$ reizes lielāka par fāzes strāvu,

$$I_L = \sqrt{3}I_F. \quad (4.9)$$

4.4. Sistēma zvaigzne - zvaigzne ar neitrāles vadu

Viens no izplatītākajiem trīsfāžu sistēmas slēgumiem ir zvaigzne – zvaigzne ar neitrāles vadu (4.10.att.), šo slēgumu izmanto galvenokārt zemsprieguma sadales tīklos. Sistēma sastāv no trīsfāžu EDS avota, četru vadu līnijas un trīsfāžu slodzes.



4.10.att. Slēgums zvaigzne-zvaigzne ar neitrāles vadu

Ja neitrāles vada pretestība ir salīdzinoši maza, tad potenciālu starpība starp punktiem N un n faktiski ir 0. Shēmā varam aplūkot trīs kontūrus, to strāvas var aprēķināt pēc Oma likuma,

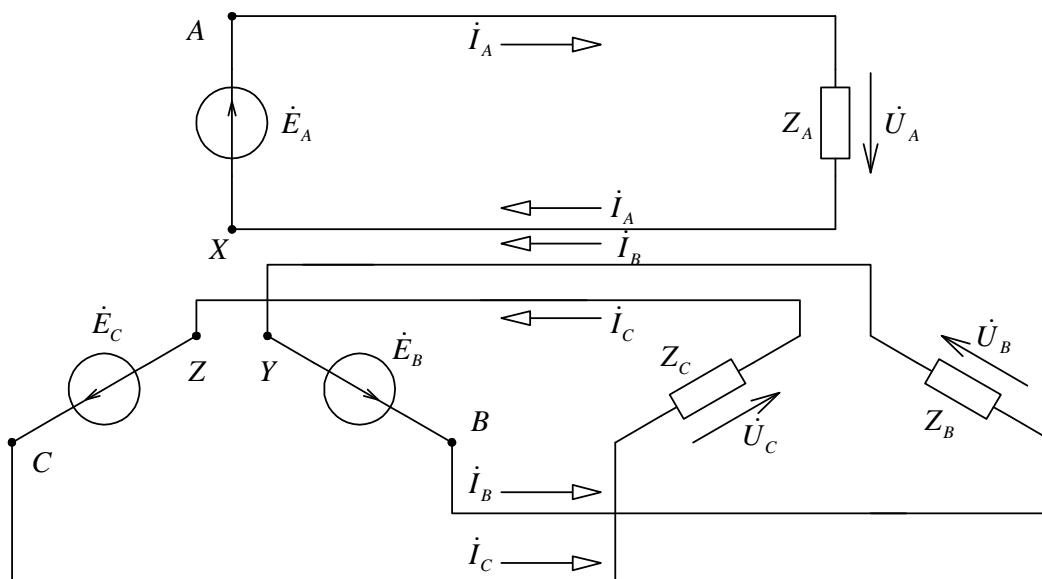
$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C}{Z_C} \quad (4.10) \quad (4.11) \quad (4.12)$$

Pēc pirmā Kirhoha likuma strāva neitrāles vadā ir fāzes strāvu ģeometriskā summa

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \quad (4.13)$$

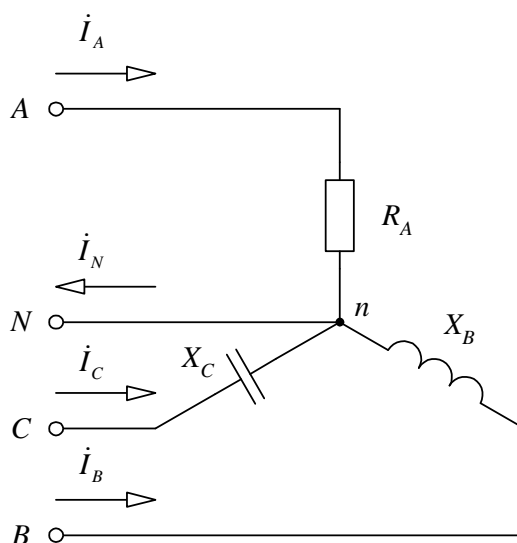
Ja ir simetriska slodze, $Z_A = Z_B = Z_C$, tad $\dot{I}_N = 0$.

Zvaigzne – zvaigzne slēguma būtību labāk var izprast, iedomāti saslēdzot katru ģeneratora fāzes tinumu ar slodzi. Iegūstam zvaigznes slēguma ekvivalento shēmu (4.11.att.), kur katra fāzes ķēde ir attēlota kā atsevišķs kontūrs.



4.11.att. Slēguma zvaigzne-zvaigzne ar neitrāles vadu ekvivalentā shēma

Piemērs Dota shēma ar asimetrisku slodzi (4.12.att.). Dots līnijas spriegums U_L un R , L un C . Uzzīmēt topogrāfisko vektoru diagrammu.



4.12.att. Zvaigzne ar neitrāles vadu asimetriskai slodzei

Fāzes pilno pretestību varam noteikt ar sakarībām,

$$Z_A = R; \quad Z_B = j\omega L; \quad Z_C = \frac{-j}{\omega C}. \quad (4.14) \quad (4.15) \quad (4.16)$$

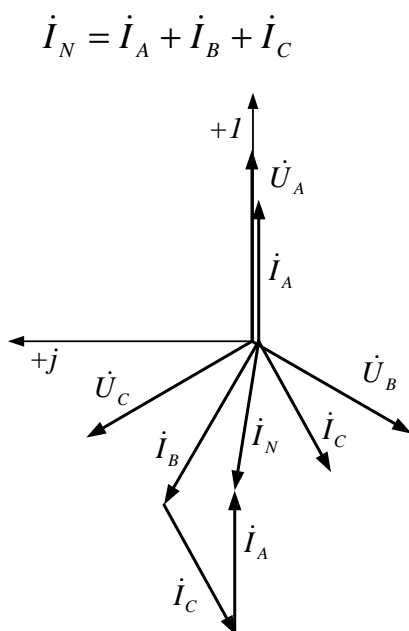
No līnijas sprieguma U_L var aprēķināt fāzes spriegumu,

$$\dot{U}_A = \frac{U_L}{\sqrt{3}}; \quad \dot{U}_B = \frac{U_L}{\sqrt{3}} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_C = \frac{U_L}{\sqrt{3}} e^{j120^\circ} \quad (4.17) \quad (4.18) \quad (4.19)$$

Līnijas strāvu var aprēķināt izmantojot sakarības,

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C}. \quad (4.20) \quad (4.21) \quad (4.22)$$

Izmantojot sakarību (4.13), var aprēķināt neitrāles vada strāvu un uzzīmēt topogrāfisko diagrammu.

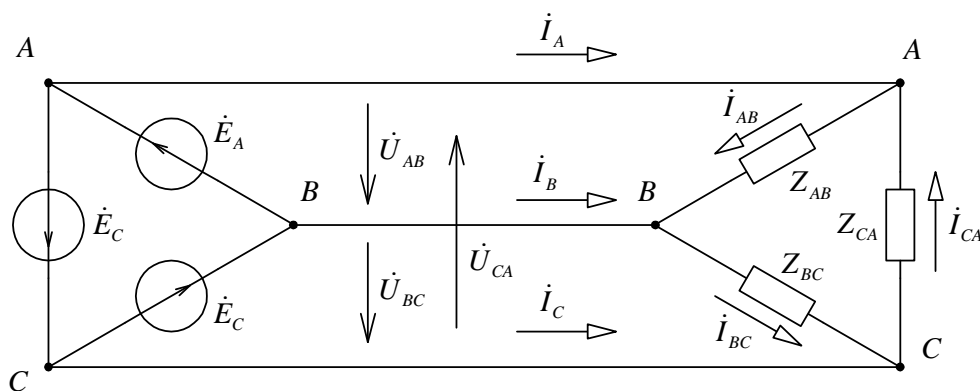


4.13.att. Topogrāfiskā diagramma zvaigznes slēgumam ar neitrāles vadu

Topogrāfiskajā diagrammā redzam, ka strāva \dot{I}_B atpaliek fāzē par 90° no sprieguma \dot{U}_B , bet strāva \dot{I}_C apsteidz spriegumu \dot{U}_C fāzē par 90° . Strāvu vektorus \dot{I}_A , \dot{I}_B un \dot{I}_C novietojot secīgi vienu aiz otra iegūstam vektoru summu, kuras rezultāts ir neitrāles strāvas vektors \dot{I}_N . Šī diagramma apstiprina to, ka neitrāles strāvas aprēķinu jāveic izmantojot ģeometrisku aprēķinu, vai analītiski jāaprēķina ar kompleksajiem skaitļiem.

4.5. Sistēma trīsstūris - trīsstūris

Sistēmu trīsstūris - trīsstūris var apskatīt kā trīs atsevišķas fāžu shēmas, kuras ir apvienotas. Ģenerators fāžu tinumus var pieslēgt slodzei ar sešiem vadiem (4.15.att.). Secīgi savienojot ģenerators fāžu beigu galus ar nākošās fāzes sākuma galu, A ar Z, C ar Y un B ar X, varam izveidot trīs vadu sistēmu, tādu kā 4.14. attēlā parādīta.



4.14.att. Sistēma trīsstūris - trīsstūris

Trīsstūra slodzei fāzes strāvas var aprēķināt pēc Oma likuma,

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}}; \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}}; \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} \quad (4.23) \quad (4.24) \quad (4.25)$$

Līnijas strāvas izteiksim no fāžu strāvām ar pirmo Kirhofa likumu.

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} \quad (4.26)$$

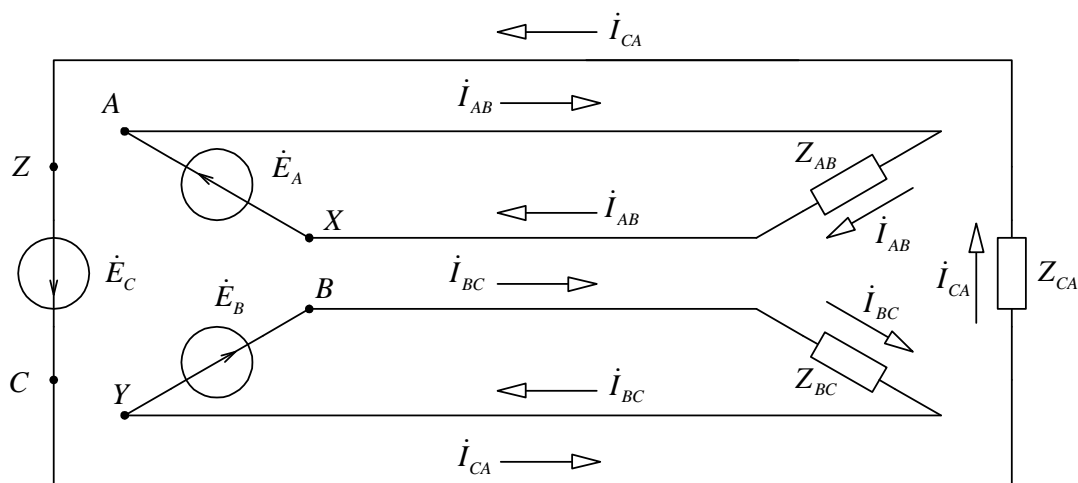
$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} \quad (4.27)$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} \quad (4.28)$$

Līnijas strāvu summa trīs vadu sistēmai vienmēr ir 0,

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 \quad (4.29)$$

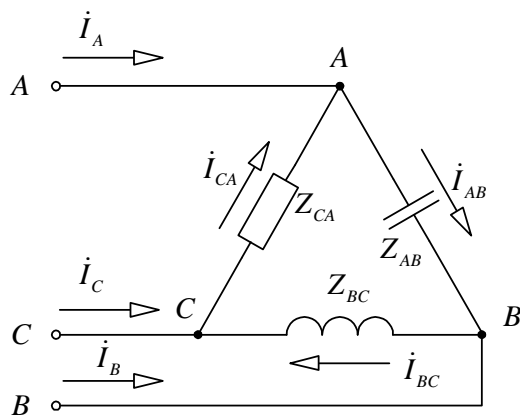
Simetriskas slodzes gadījumā līnijas strāva $\sqrt{3}$ reizes lielāka par fāzes strāvu.



4.15.att. Trīsstūra- trīsstūra slēguma ekvivalentā shēma

Piemērs

Dota shēma ar asimetrisku slodzi (4.16.att.). Uzzīmēt topogrāfisko diagrammu. Dots līnijas spriegums U_L un R , L un C .



4.16.att. Trīsstūra slēgums asimetriskai slodzei

Fāzes pretestību varam noteikt ar sakarībām,

$$Z_{CA} = R; \quad Z_{AB} = \frac{-j}{\omega C}; \quad Z_{BC} = j\omega L.$$

Trīsstūra slēgumam fāzes spriegums ir vienāds ar līnijas spriegumu

$$\dot{U}_{AB} = U_L e^{j0^\circ}; \quad \dot{U}_{BC} = U_L e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = U_L e^{j120^\circ} \quad (4.30) \quad (4.31) \quad (4.32)$$

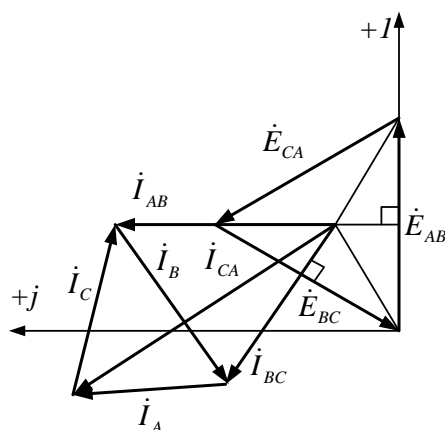
Fāzes strāvu var aprēķināt pēc Oma likuma, (4.23),(4.24),(4.25).

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{-j\omega C}; \quad \dot{i}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{\dot{U}_{BC}}{j\omega L}; \quad \dot{i}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{\dot{U}_{CA}}{R}.$$

Summējam līnijas strāvas,

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

Izmantojot sakarības (4.26)...(4.29), zīmējam topogrāfisko diagrammu.



4.17.att. Topogrāfiskā diagramma trīsstūra slēgumam asimetriskai slodzei

4.6. Trīsfāžu sistēmas operators a

Trīsfāžu sistēmas operators ir kompleksais skaitlis e^{j120° , kura moduļa vērtība ir 1, to apzīmē ar a .

$$a = e^{j120^\circ} \quad (4.33)$$

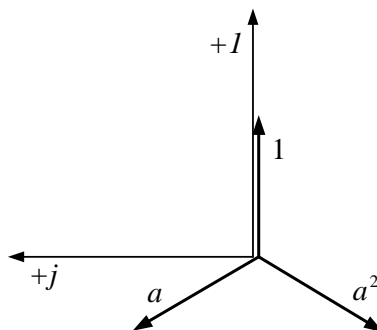
$$e^{j240^\circ} = (e^{j120^\circ})^2 = a^2 \quad (4.34)$$

Ar trīs vektoriem 1; a un a^2 apzīmējam trīsfāžu sistēmu.

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (4.35)$$

Ja kādu vektoru pareizina ar a , tad, šis vektors tiek pagriezts par 120° pretēji pulksteņa rādītāja virzienam.

Ja vektoru pareizina par a^2 , tad vektors tiek pagriezts par 240° pretēji pulksteņa rādītāja virzienam.



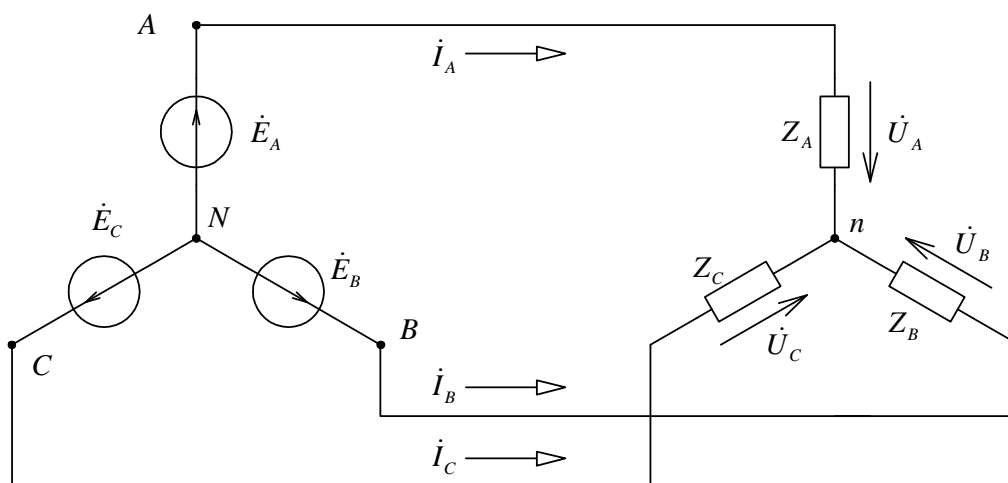
4.18.att. Trīsfāžu sistēmas operators a uz kompleksās plaknes

Ar operatoru a var izteikt fāžu elektrodzinējspēkus $\dot{E}_B, \dot{E}_C, \dot{E}_A$

$$\dot{E}_B = \dot{E}_A \cdot a; \quad \dot{E}_C = \dot{E}_A \cdot a^2; \quad \dot{E}_A = \dot{E}_B \cdot a^2 \quad (4.36) \quad (4.37) \quad (4.38)$$

4.7. Slēgums zvaigzne - zvaigzne bez neitrāles vada

Slēgumu zvaigzne – zvaigzne bez neitrāles vada parasti izmanto simetriskas slodzes pieslēgšanai, kā arī enerģijas pārvadē. Slodzes asimetrijas gadījumā veidojas sprieguma nobīde starp N un n mezglu punktiem, lai varētu aprēķināt fāžu strāvas, nepieciešams noskaidrot šo nobīdes spriegumu.



4.19.att. Slēgums zvaigzne-zvaigzne bez neitrāles vada

Izmantojot divu mezglu aprēķinu metodi, var noteikt spriegumu starp N un n mezglu punktiem.

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{E}_A (Y_A + a^2 Y_B + a Y_C)}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (4.39)$$

Fāžu slodzes vadītspējas var aprēķināt,

$$Y_A = \frac{1}{Z_A}, \quad Y_B = \frac{1}{Z_B}, \quad Y_C = \frac{1}{Z_C}.$$

Ja slodze ir simetriska, tad fāžu slodzes vadītspējas ir vienādas,

$$Y_A = Y_B = Y_C \quad (4.40)$$

to ievietojot sakarībā (4.39), iegūstam,

$$U_{nN} = \frac{\dot{E}_A Y_A (1 + a + a^2)}{3Y_A} = 0,$$

jo

$$1 + a + a^2 = 0.$$

Rezultātā redzam, ka slodzes fāžu spriegumi sakrīt ar ģeneratora fāžu spriegumiem,

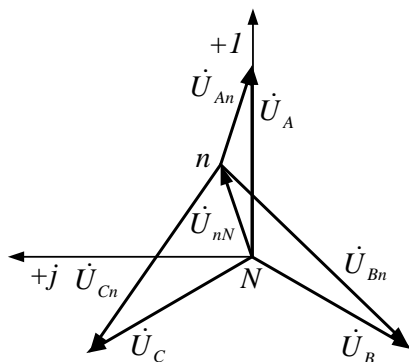
$$\dot{U}_{An} = \dot{E}_A; \quad \dot{U}_{Bn} = \dot{E}_B; \quad \dot{U}_{Cn} = \dot{E}_C$$

Asimetriskas slodzes gadījumā, slodzes fāžu spriegumus var noteikt,

$$\dot{U}_{An} = \dot{E}_A - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_{Bn} = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN}; \quad \dot{U}_{Cn} = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN} \quad (4.41) \quad (4.42) \quad (4.43)$$

strāva fāzēs būs

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{An}}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{Bn}}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{Cn}}{Z_C}. \quad (4.44)$$



4.20.att. Sprieguma diagramma asimetriskam zvaigznes slēgumam

4.8. Aktīvā, reaktīvā, pilnā trīsfāžu sistēmas jauda

Aktīvā jauda trīsfāžu sistēmai ir summārā sistēmas aktīvā jauda.

$$P = P_A + P_B + P_C + P_N, \quad (4.45)$$

kur P_A, P_B, P_C - fāžu aktīvā jauda, W ,

P_N - jauda, kuru patērē neitrāles vada pretestība, W .

Reaktīvā jauda trīsfāžu sistēmai ir summārā sistēmas reaktīvā jauda. Summējot jaudu, ņem vērā reaktīvās slodzes raksturu, ja induktīva, tad summē ar „+” zīmi, ja kapacitatīva, tad ar „-” zīmi.

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_N, \quad (4.46)$$

kur Q_A, Q_B, Q_C - fāzes reaktīvā jauda, VAR ,

Q_N - neitrāles vadā ieslēgtā reaktīvā jauda, VAR .

Pilno jaudu trīsfāžu sistēmai var aprēķināt summējot aktīvo un reaktīvo jaudu,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4.47)$$

Simetriskas slodzes gadījumā $P_N = Q_N = 0$

$$P_A = P_B = P_C = U_F I_F \cos \varphi, \quad (4.48)$$

$$Q_A = Q_B = Q_C = U_F I_F \sin \varphi, \quad (4.49)$$

kur U_F, I_F - fāzes spriegums un fāzes strāva;

φ - nobīdes leņķis starp fāzes spriegumu un strāvu.

Simetriskas slodzes gadījumā visai sistēmai jaudas var aprēķināt, gan ar fāžu, gan līnijas spriegumiem un strāvām,

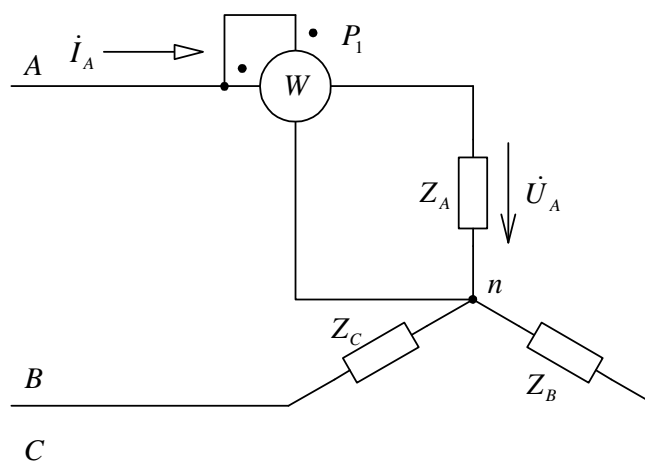
$$P = 3U_F I_F \cos \varphi_F = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi \quad (4.50)$$

$$Q = 3U_F I_F \sin \varphi_F = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi \quad (4.51)$$

$$S = 3U_F I_F = \sqrt{3}U_L I_L. \quad (4.52)$$

4.9. Aktīvās trīsfāžu sistēmas jaudas noteikšana

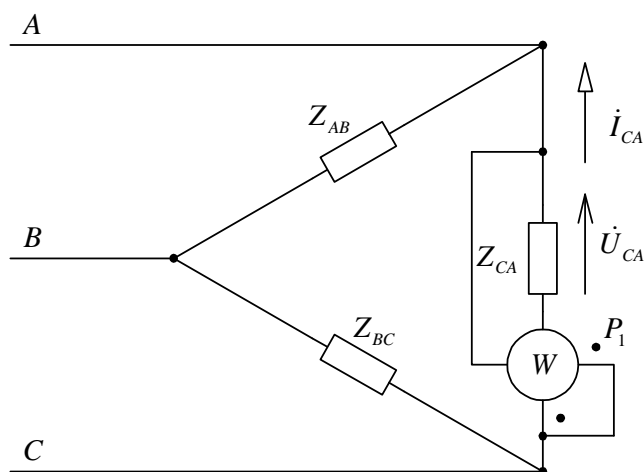
Trīsfāžu sistēmas aktīvo jaudu var noteikt ar trīs vatmetriem. Tie jāieslēdz atsevišķi, katras fāzes jaudas mērīšanai. Caur vatmetra strāvas spoli jālaiž fāzes strāva un sprieguma spoles jāpieslēdz mērāmās fāzes spriegumam. Visas sistēmas jaudu nosaka saskaitot visu trīs vatmetru rādījumus.



4.21.att. Jaudas mērīšana simetriskam zvaigznes slēgumam

Simetriskas slodzes gadījumā (4.21.att. un 4.22.att.), pietiek ar vienas fāzes jaudas mērījumu, lai noteiktu trīsfāžu sistēmas aktīvo jaudu, vienas fāzes jaudu reizina ar trīs,

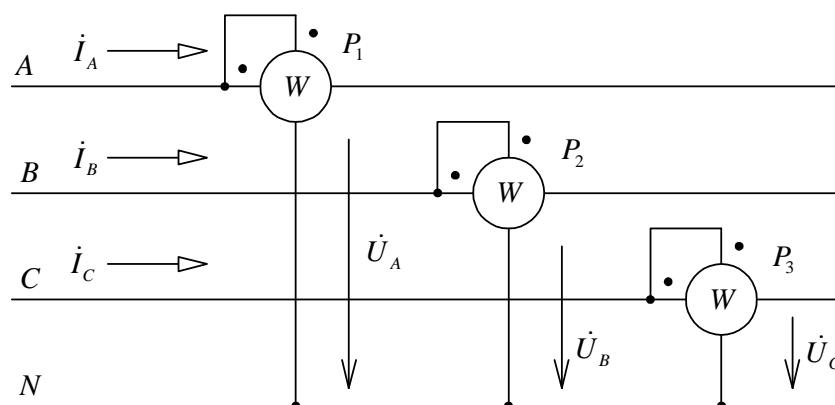
$$P = 3P_1. \quad (4.53)$$



4.22.att. Jaudas mērīšana simetriskam trīsstūra slēgumam

Nesimetriskai trīsfāžu slodzei, četru vadu sistēmai jauda jāmēra katrai fāzei atsevišķi un ir nepieciešami 3 vatmetri (4.23.att.). Visas sistēmas jaudu aprēķina saskaitot vatmetru rādījumus,

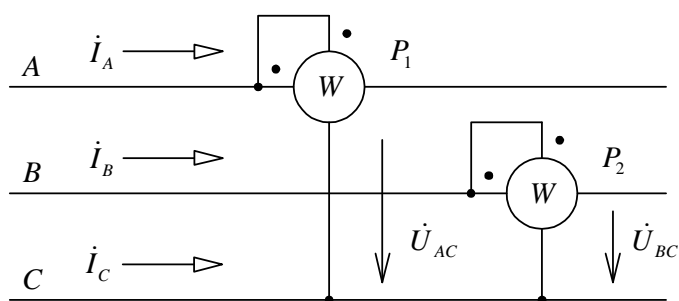
$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (4.54)$$



4.23.att. Jaudas mērīšana asimetriskai slodzei 4 vadu sistēmai

Trīs vadu sistēmā jaudas mērīšanai izmanto divu vatmetru metodi (4.24.att.). Šo metodi var lietot gan simetriskas, gan nesimetriskas slodzes gadījumā, gan trīsstūra slēgumam, gan zvaigznes slēgumam, tā ir izmantojama *tikai trīs vadu sistēmai*. Nevienam no vatmetru rādījumiem neatbilst kāda konkrēta slodze shēmā, bet abu vatmetru rādījumu summa ir sistēmas summārā jauda,

$$P = P_1 + P_2 \quad (4.55)$$



4.24.att. Jaudas mērīšana slodzei 3 vadu sistēmai

Izmantojot divu vatmetru jaudas mērīšanas principu, jaudu var aprēķināt,

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC} I_A \cos(\psi_{u_{AC}} - \psi_{i_A}) + U_{BC} I_B \cos(\psi_{u_{BC}} - \psi_{i_B}), \quad (4.56)$$

kur ψ_u, ψ_i - spriegumu un strāvu nobīdes leņķi vektoru diagrammā.

Simboliskā formā aktīvās jaudas aprēķins būs šāds,

$$P = P_1 + P_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}_{AC} I_A^*) + \operatorname{Re}(\dot{U}_{BC} I_B^*), \quad (4.57)$$

kur $\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA}$ - sprieguma vektora virziens pretējs \dot{U}_{CA} spriegumam.

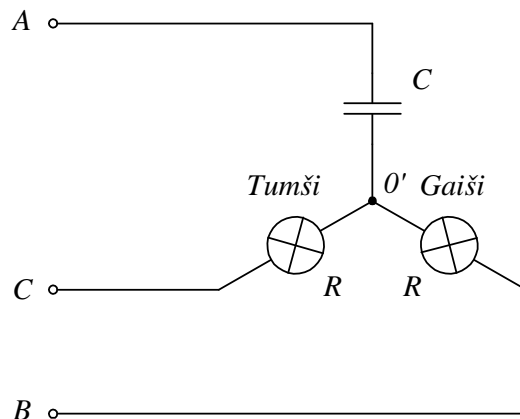
4.10. Fāžu secības indikators

Fāžu secības indikators sastāv no divām vienādām kvēlspuldzēm un kondensatora C . Kondensatoru izvēlas ar tādu kapacitāti, lai izpildītu nosacījumu,

$$\frac{1}{\omega C} = R, \quad (4.58)$$

kur R – kvēlspuldzes pretestība, Ω ,
 C – kondensatora kapacitāte, F .

Spriegums uz lampām būs dažāds, B fāzē pieslēgtā lampa degs gaišāk nekā tā, kura ir fāzē C .



4.25.att. Fāžu secības indikators

Tātad, ja iepriekš apskatīto shēmu izmantojam fāžu secības noteikšanai, tad, ja pieņemam, ka kondensators ir pieslēgts fāzei A , gaiši degošā lampa būs pieslēgta B fāzei, tumši degošā fāzei C .

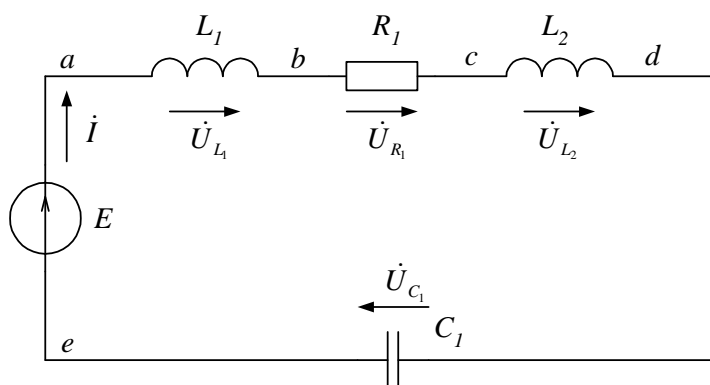
5. MAINSTRĀVAS ĶĒŽU APRĒĶINI

5.1. Vienfāzes sinusoidālas strāvas ķēžu aprēķini

5.1.1. Virknes slēguma aprēķins

Piemērs

Aprēķināt shēmai strāvu, spriegumu uz shēmas elementiem. Uzzīmēt spriegumu topogrāfisko diagrammu. Noteikt shēmai aktīvo jaudu P , reaktīvo jaudu Q , pilno jaudu S , un jaudas koeficientu $\cos \varphi$. Noteikt pie kādas frekvences shēmai būs rezonanse, ja tā iespējama. Kāda būs rezonanses strāva?



5.1.att. Shēma

Dots:	$E = 120V$	$L_1 = 15,9mH = 15,9 \cdot 10^{-3} H$
	$f = 150Hz$	$L_2 = 7,9mH = 7,9 \cdot 10^{-3} H$
	$R = 10\Omega$	$C = 100\mu F = 100 \cdot 10^{-6} F$

Ja virknē saslēgti vairāki R ; L un C , tad ķēdes pilno pretestību var aprēķināt,

$$z = \sqrt{(\sum R_i)^2 + (\sum X_{L_i} - \sum X_{C_i})^2}.$$

Induktīvo pretestību aprēķinām,

$$X_L = \omega L = 2\pi fL$$

$$X_{L1} = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 14,99\Omega$$

$$X_{L2} = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 7,9 \cdot 10^{-3} = 7,45\Omega$$

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} = 14,99 + 7,45 = 22,44\Omega$$

Aprēķinām kapacitatīvo pretestību,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 10,61\Omega$$

Ja $X_L > X_C$, tad visai ķēdei piemīt induktīvs raksturs, t.i. strāvas I vektors atpaliek fāzē no ķēdes sprieguma U vektora,

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{10^2 + (22,44 - 10,61)^2} = 15,49\Omega$$

Strāvu ķēdē var noteikt ar Oma likumu sinusoidālai strāvai,

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{z} = \frac{E}{z}$$

$$I = \frac{120}{15,49} = 7,75A$$

Aprēķinām spriegumus uz ķēdes elementiem,

$$U_a = U_R = I \cdot R = 7,75 \cdot 10 = 77,5V$$

$$U_{L1} = I \cdot X_{L1} = 7,75 \cdot 14,99 = 116,17V$$

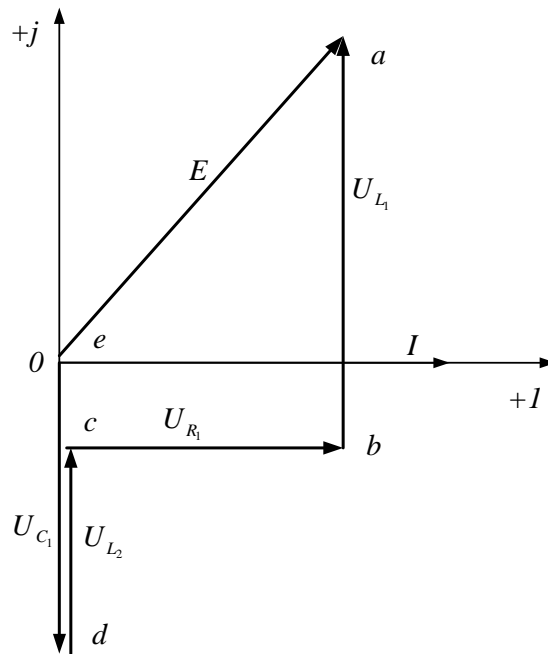
$$U_{L2} = I \cdot X_{L2} = 7,75 \cdot 7,45 = 57,74V$$

$$U_C = I \cdot X_C = 7,75 \cdot 10,61 = 82,23V$$

Izmantojot otro Kirhofa likumu pārbaudām aprēķinu pareizību, visu sprieguma kritumu summai U ir jābūt vienāgai ar elektrodzinējspēku E ,

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_{L1} + U_{L2} - U_C)^2}$$

$$U = \sqrt{77,5^2 + (116,17 + 57,74 - 82,23)^2} = 120V.$$



5.2. att. **Potenciālu diagramma**

Ja spriegumi ir zināmi, var konstruēt potenciālu, jeb topogrāfisko spriegumu diagrammu. Diagrammas zīmēšanu sāk no punkta ar *zemāko potenciālu*, shēmā 5.1.attēlā, tas ir punkts e. Potenciālu diagrammu zīmējam pa punktiem pārvietojoties *pret strāvas virzienu*, no zemākā potenciāla uz augstāko. Sprieguma vektoram augstāks potenciāls ir pie bultiņas. Sprieguma vektora smaile, norāda augstāko potenciālu. *Nejaukt sprieguma vektorus ar bultiņām, kuras izmanto shēmās, sprieguma krituma virziena apzīmēšanai!!!* Vektori ir matemātiski definēti un to apzīmējuma virziens ir pretējs.

Potenciālu diagrammu sākam zīmēt no punkta e. Uz kompleksās plaknes atliekam kapacitatīvā sprieguma vektoru U_C , kas atpaliek fāzē no strāvas I par 90° , tā virziens ir vērsts perpendikulāri uz leju, attiecībā pret strāvu I . Atrodam punktu d. Nākošais ir induktīvais spriegums U_{L_2} , kas strāvu I apsteidz fāzē par 90° un virziens ir pretēji vērsts kapacitatīvajam spriegumam. Atrodam punktu c. Nākošais ir aktīvais spriegums U_R , kas sakrīt ar strāvas I virzienu, atrodam punktu b. Starp punktu b un a ir induktīvais spriegums U_{L_1} , kas ir vērsts perpendikulāri uz augšu attiecībā pret strāvu I .

Diagrammu noslēdz *EDS* vektors. Ja mērogā zīmējot, vektori izveido noslēgtu diagrammu, tad iespējams, ka uzdevums atrisināts pareizi.

Aprēķinām pilno jaudu,

$$S = UI = 120 \cdot 7,75 = 930VA .$$

Izmantojot shēmas aktīvo un pilno pretestību, var aprēķināt jaudas koeficientu

$$\cos \varphi = \frac{R}{z} = \frac{10}{15,49} = 0,65 .$$

Shēmas aktīvā jauda ir,

$$P = UI \cos \varphi = 930 \cdot 0,65 = 604,5W .$$

Reaktīvā jauda,

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{930^2 - 604,5^2} = 706,74VAr .$$

Noteikt pie kādas frekvences shēmai būs rezonanse, ja tā ir iespējama. Kāda būs rezonanses strāva?

Elektrotehnikā par rezonansi sauc elektriskās ķēdes darbības režīmu, kad ķēdei, kura satur induktivitāti un kapacitāti, ķēdes reaktīvā pretestība ir vienāda ar nulli. Izšķir divus elektriskās rezonanses veidus, sprieguma rezonansi, kas darbojas virknes slēgumā un strāvas rezonansi paralēlajā slēgumā. Sprieguma rezonanse iestājas tad, ja virknes slēgumam

$$X = X_L - X_C = 0 \quad \text{vai} \quad X_L = X_C \quad \text{un} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} .$$

No pēdējās sakarības redzam, ka sprieguma rezonansi var panākt, mainot frekvenci, induktivitāti vai kapacitāti.

Pirmajā gadījumā rezonanse iestājas tad, ja avota frekvence vienāda ar ķēdes rezonanses frekvenci,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{tad} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_{\text{Rez.}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \sqrt{(15,9 \cdot 10^{-3} + 7,9 \cdot 10^{-3}) \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = 103 \text{ Hz}.$$

Tādā gadījumā ķēdes pilnā pretestība,

$$z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

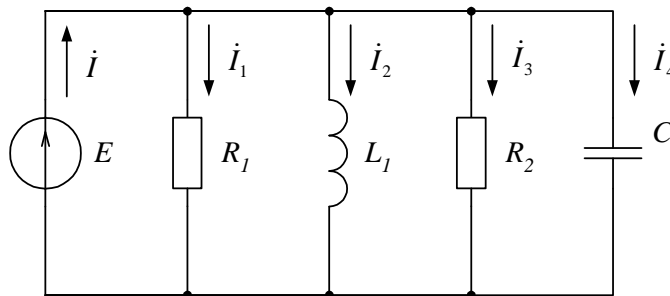
un rezonanses strāva būs,

$$I_{\text{Rez.}} = \frac{U}{R} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}.$$

5.1.2. Paralēlā slēguma aprēķins

Piemērs

Aprēķināt strāvas shēmas zarus. Noteikt shēmai aktīvo jaudu P , reaktīvo jaudu Q , pilno jaudu S un jaudas koeficientu $\cos \varphi$. Kāda papildus kapacitāte C jāpieslēdz, vai jāatslēdz no shēmas, lai nodrošinātu $\cos \varphi = 0,95$.



5.3.att. Shēma

Dots: $E = 120\text{V}$ $R_1 = 10\Omega$ $L = 15,9\text{mH} = 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ H}$
 $f = 50\text{Hz}$ $R_2 = 4\Omega$

Atrodam katra ķēdes zara pilno pretestību,

$$z_1 = R_1 = 10\Omega$$

$$z_2 = X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 4,99\Omega$$

$$z_3 = R_2 = 4\Omega$$

Aprēķinām strāvu efektīvās vērtības katrā ķēdes zarā,

$$I_1 = \frac{U}{z_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{120}{10} = 12A$$

$$I_2 = \frac{U}{z_2} = \frac{E}{X_L} = \frac{120}{4,99} = 24A$$

$$I_3 = \frac{U}{z_3} = \frac{E}{R_2} = \frac{120}{4} = 30A$$

Aprēķinām ķēdes kopējo strāvu,

$$I = \sqrt{(I_1 + I_3)^2 + I_2^2} = \sqrt{(12 + 30)^2 + 24^2} = 48,37A$$

Aprēķinām jaudas koeficientu, aktīvo strāvu daļa ar kopējo,

$$\cos \varphi = \frac{(I_1 + I_3)}{I} = \frac{12 + 30}{48,37} = 0,868$$

Aktīvā jauda,

$$P = IU \cos \varphi = 48,37 \cdot 120 \cdot 0,868 = 5038,21W$$

Reaktīvās jaudas aprēķinām nepieciešams $\sin \varphi$, lai to atrastu, no jaudas koeficienta $\cos \varphi$, aprēķinām fāžu nobīdes leņķi,

$$\varphi = \arccos 0,868 = 29,77^\circ$$

$$\sin \varphi = \sin 29,77^\circ = 0,496$$

Reaktīvā jauda,

$$Q = IU \sin \varphi = 48,37 \cdot 120 \cdot 0,496 = 2878,98Var$$

Pilnā jauda,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{5038,21^2 + 2878,98^2} = 5802,76VA$$

Kāda papildus kapacitāte jāpieslēdz, lai $\cos\varphi = 0,95$

$$\varphi = \arccos 0,95 = 18,19^\circ$$

Kompensējamo reaktīvo jaudu var aprēķināt,

$$Q_K = P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_{0,95}) = 5038(\operatorname{tg}29,77^\circ - \operatorname{tg}18,19^\circ) = 1226\text{VAR}$$

$$I_4 = \frac{Q_K}{U} = \frac{1226}{120} = 10,22\text{A}$$

Tātad, lai $\cos\varphi = 0,95$, ķēdes ceturtajā zarā jāplūst $I_4 = 10,22\text{A}$ strāvai. Atrodam kapacitatīvo pretestību, kas nodrošinās šādu strāvu,

$$z_4 = \frac{U}{I_4} = \frac{120}{10,22} = 11,74\Omega$$

$$X_{C_4} = z_4 = 11,74\Omega$$

Aprēķinām kondensatora kapacitāti,

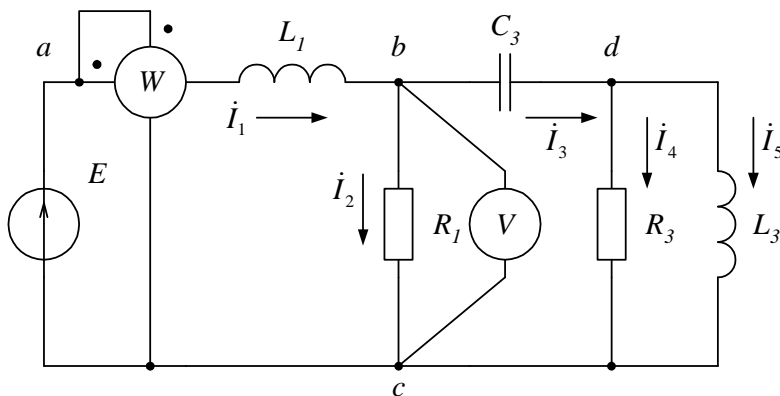
$$C_{\text{papil.}} = \frac{1}{X_{C_4}\omega} = \frac{1}{X_{C_4}2\pi f} = \frac{1}{11,74 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,000271\text{F} = 271 \cdot 10^{-6}\text{F}$$

5.1.3. Jaukta slēguma aprēķins

Piemērs

Aprēķināt dotajai shēmai strāvas visos zaros un spriegumus. Sastādīt aktīvās un reaktīvās jaudas balansa vienādojumu. Noteikt voltmetra un vatmetra rādījumus. Uzzīmēt topogrāfisko diagrammu.

Dots:	$E = 120\text{V}$	$R_1 = 10\Omega$	$L_1 = 15,9\text{mH} = 15,9 \cdot 10^{-3}\text{H}$
	$f = 150\text{Hz}$	$R_3 = 75\Omega$	$L_3 = 115\text{mH} = 115 \cdot 10^{-3}\text{H}$
			$C_3 = 100\mu\text{F} = 100 \cdot 10^{-6}\text{F}$



5.4.att. Shēma

Aprēķinām induktīvās un kapacitatīvo pretestību,

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 15\Omega$$

$$X_{L3} = \omega L_3 = 2\pi f L_3 = 2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 75,36\Omega$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{2\pi f C_3} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 150 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 10,6\Omega$$

Shēmā ir 5 kompleksās pretestības ar šādām vērtībām,

$$Z_1 = jX_{L1} = j15\Omega$$

$$Z_2 = R_1 = 10\Omega$$

$$Z_3 = -jX_{C3} = -j10,6\Omega$$

$$Z_4 = R_3 = 75\Omega$$

$$Z_5 = jX_{L3} = j75,36\Omega$$

Kompleksais spriegums,

$$\dot{U} = 120 + j \cdot 0 = 120V$$

Aprēķinām shēmai visas komplekso pretestību komponentes un kopējo komplekso pretestību,

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_{345}}{Z_2 + Z_{345}};$$

$$Z_{45} = \frac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5} = \frac{75 \cdot j75,36}{75 + j75,36} = 37,68 + j37,50 = 53,16e^{j44,86^\circ} \Omega$$

$$Z_{345} = Z_3 + Z_{45} = -j10,6 + 37,68 + j37,50 = 37,68 + j26,90 = 46,30e^{j35,52^\circ} \Omega$$

$$Z_{2345} = \frac{Z_2 Z_{345}}{Z_2 + Z_{345}} = \frac{10 \cdot (37,68 + j26,90)}{10 + 37,68 + j26,90} = 8,41 + j0,90 = 8,46e^{j6,09^\circ} \Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_{2345} = j15 + 8,41 + j0,90 = 8,41 + j15,90 = 17,99e^{j62,12^\circ} \Omega$$

Barošanas avota ķēdē plūst strāva,

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{120}{8,41 + j15,90} = 3,12 - j5,90 = 6,67e^{-j62,12^\circ} A$$

Lai aprēķinātu strāvas posmā bc, atrodam šī posma spriegumu.

$$\dot{U}_{bc} = Z_{2345} \dot{I}_1 = (8,41 + j0,90)(3,12 - j5,90) = 31,55 - j46,81 = 56,45e^{-j56,02^\circ} V$$

Spriegums posmā ab,

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{U}_{bc} = 120 - (31,55 - j46,81) = 88,45 + j46,81 = 100,07e^{j27,89^\circ} V$$

Strāvas posmā bc,

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_2} = \frac{(31,55 - j46,81)}{10} = 3,155 - j4,681 = 5,64e^{-j56,02^\circ} A$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{345}} = \frac{(31,55 - j46,81)}{(37,68 + j26,90)} = -0,033 - j1,219 = 1,22e^{-j91,54^\circ} A$$

Spriegums posmā bd,

$$\dot{U}_{bd} = \dot{I}_3 \cdot Z_3 = (-0,033 - j1,219)(-j10,6) = -12,92 + j0,35 = 12,93e^{j178,45^\circ} V$$

Spriegums posmā dc,

$$\dot{U}_{dc} = \dot{I}_3 \cdot Z_{45} = (-0,033 - j1,219)(37,68 + j37,50) = 44,47 - j47,17 = 64,83e^{-j46,69^\circ} V$$

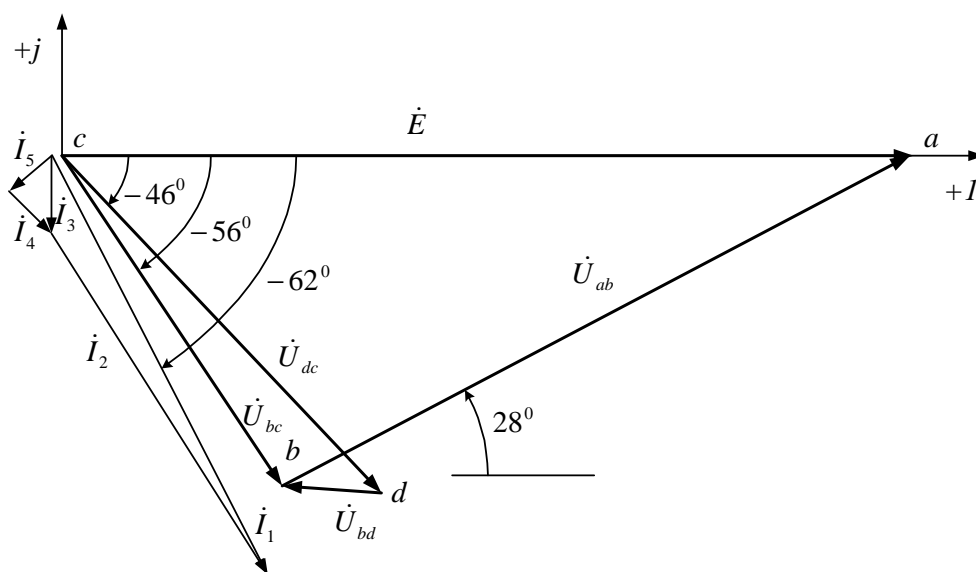
vai,

$$\dot{U}_{dc} = \dot{U}_{bc} - \dot{U}_{bd} = 31,55 - j46,81 - (-12,92 + j0,35) = 44,47 - j47,17 = 64,83e^{-j46,69^\circ} V$$

Strāva posmā dc,

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{dc}}{Z_4} = \frac{(44,47 - j47,17)}{75} = 0,593 - j0,629 = 0,86e^{-j46,69^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{dc}}{Z_5} = \frac{(44,47 - j47,17)}{j75,36} = -0,626 - j0,590 = 0,86e^{-j136,69^\circ} \text{ A}$$



5.5.att. Spriegumu un strāvu diagramma

Voltmetrs uzrāda spriegumu, $U_{bc} = 56,45V$.

Aprēķini veikti pareizi, ja to apstiprina jaudas balanss. Avota atdotajai aktīvajai un reaktīvajai jaudai ir jāsakrīt ar patērētāju saņemto aktīvo un reaktīvo jaudu.

Rakstām aktīvās un reaktīvās jaudas balansa vienādojumu,

$$S = U \cdot I^* = P + jQ$$

Patērētāju saņemtā aktīvā jauda,

$$\sum P = \sum RI^2$$

$$P_2 = I_2^2 R_1 = 5,64^2 10 = 318,10W$$

$$P_4 = I_4^2 R_3 = 0,86^2 75 = 55,47W$$

$$P = P_2 + P_4 = 318,10 + 55,47 = 373,57W$$

Patērētāju saņemtā reaktīvā jauda,

$$\sum Q = \sum XI^2$$

$$Q_1 = X_{L_1} I_1^2 = 6,67^2 15 = 667,33VAr$$

$$Q_3 = X_C I_3^2 = 1,22^2 10,6 = 15,78VAr$$

$$Q_5 = X_{L_3} I_5^2 = 0,86^2 75,36 = 55,74VAr$$

$$Q = Q_1 - Q_3 + Q_5 = 667,33 - 15,78 + 55,74 = 707,29VAr$$

Avota atdotā jauda,

$$S = U \cdot I^* = 120 \cdot 6,67 e^{j62,12^\circ} = 800,4 e^{j62,12^\circ} = 374,28 + j707,49$$

Vatmetra rādījums ir $P = 374W$.

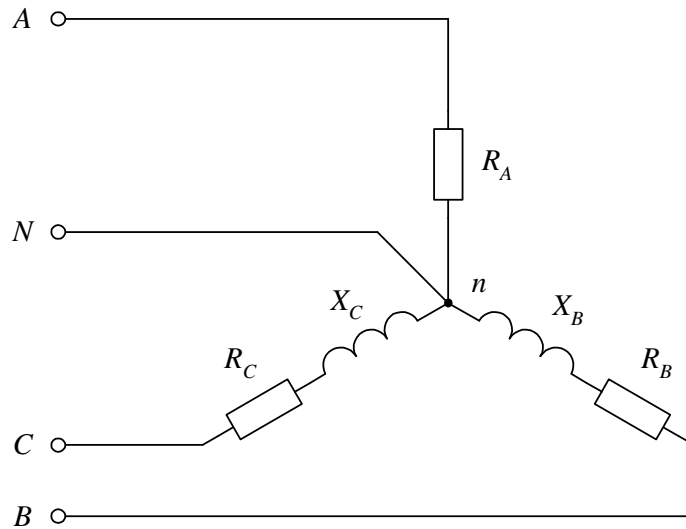
Novērtējam aprēķinu kļūdu.

5.2. Trīsfāžu ķēžu aprēķini

5.2.1. Trīsfāžu zvaigznes slēgums ar neitrāles vadu

Piemērs

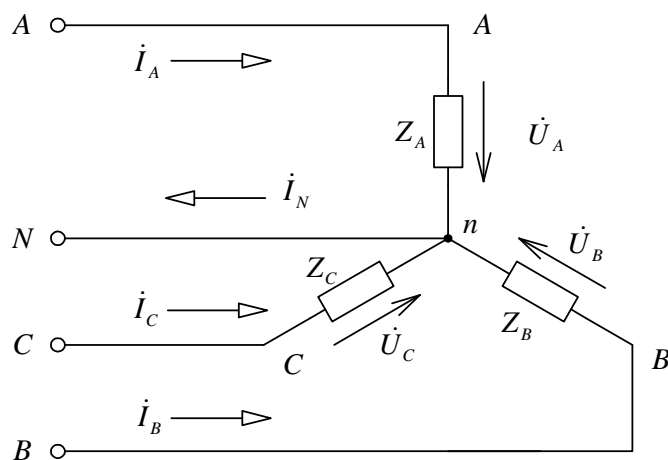
Aprēķināt shēmai fāzes un līnijas strāvas, strāvu neitrālē, aktīvo jaudu, reaktīvo jaudu katrai fāzei atsevišķi un visai sistēmai. Noteikt jaudas koeficientu $\cos\varphi$. Konstruēt topogrāfisko spriegumu un strāvu vektoru diagrammu.



5.6.att. Shēma

Dots: $U_L = 220V$ $R_A = 22\Omega$ $R_B = 15,6\Omega$ $R_C = 10\Omega$
 $X_B = 15,6\Omega$ $X_C = 30\Omega$

Nesimetriskas trīsfāžu sistēmas slodzes analītiskajiem aprēķiniem visērtāk izmantot *simbolisko metodi*, jo neitrāles strāva *nav* aprēķināma vienkārši aritmētiski summējot fāžu strāvas.



5.7.att. Aprēķinu shēma

Pieņemam, ka kompleksais fāzes spriegums \dot{U}_A ir vērsts reālo skaitļu ass +1 virzienā un sākuma fāzes leņķis vienāds ar 0^0 . No dotā līnijas sprieguma nosakām katras fāzes komplekso spriegumu,

$$\dot{U}_A = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127V$$

$$\dot{U}_B = \frac{U_L}{\sqrt{3}} e^{-j120^0} = \frac{220}{\sqrt{3}} e^{-j120^0} = 127e^{-j120^0} V$$

$$\dot{U}_C = \frac{U_L}{\sqrt{3}} e^{j120^0} = \frac{220}{\sqrt{3}} e^{j120^0} = 127e^{j120^0} V$$

Atrodam katras fāzes komplekso pilno pretestību,

$$Z_A = R_A = 22\Omega$$

$$Z_B = R_B + jX_B = 15,6 + j15,6 = 22,06e^{j45^0} \Omega$$

$$Z_C = R_C + jX_C = 10 + j30 = 31,62e^{j71,56^0} \Omega$$

Var aprēķināt fāžu kompleksās efektīvās strāvas,

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{127}{22} = 5,77A$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B} = \frac{127e^{-j120^0}}{22,06e^{j45^0}} = 5,76e^{-j165^0} = -(5,56 + j1,49)A$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{127e^{j120^0}}{31,62e^{j71,56^0}} = 4,02e^{j48,44^0} = (2,67 + j3,01)A$$

Aprēķinām komplekso efektīvo strāvu neitrāles vadā,

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

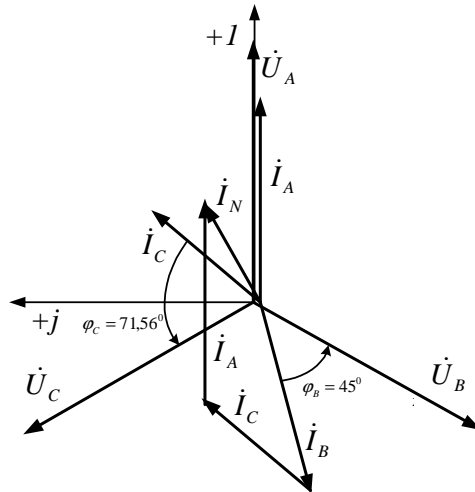
$$\dot{I}_N = 5,77 - 5,56 - j1,49 + 2,67 + j3,01 = 2,88 + j1,52 = 3,26e^{j27,82^0} A$$

Dalot katras fāzes aktīvo pretestības komponenti R ar pilnās pretestības moduļa vērtību z , aprēķinām jaudas koeficientu katrai fāzei,

$$\cos \varphi_A = \frac{R_A}{z_A} = \frac{22}{22} = 1;$$

$$\cos \varphi_B = \frac{R_B}{z_B} = \frac{15,6}{22,06} = 0,707;$$

$$\cos \varphi_C = \frac{R_C}{z_C} = \frac{10}{31,62} = 0,32$$



5.8.att. **Topogrāfiskā diagramma**

Patērēto jaudu nesimetriskas slodzes sistēmai var noteikt atsevišķi rēķinot jaudu katrai fāzei un summējot. Aprēķinus var veikt izmantojot fāžu spriegumu un strāvu moduļa vērtības, bez kompleksajiem skaitļiem. Rēķinām aktīvo jaudu,

$$P_A = U_A I_A \cos \varphi_A = 127 \cdot 5,77 \cdot 1 = 732,79W$$

$$P_B = U_B I_B \cos \varphi_B = 127 \cdot 5,76 \cdot 0,707 = 517,18W$$

$$P_C = U_C I_C \cos \varphi_C = 127 \cdot 4,02 \cdot 0,32 = 163,37W$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 732,79 + 517,18 + 163,37 = 1413W$$

Lai varētu aprēķināt reaktīvo jaudu, nepieciešams noskaidrot $\sin \varphi$,

$$\sin \varphi_A = \frac{X_A}{z_A} = \frac{0}{22} = 0;$$

$$\sin \varphi_B = \frac{X_B}{z_B} = \frac{15,6}{22,06} = 0,707;$$

$$\sin \varphi_C = \frac{X_C}{z_C} = \frac{30}{31,62} = 0,949$$

Rēķinām reaktīvo jaudu,

$$Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A = 127 \cdot 5,77 \cdot 0 = 0VAr$$

$$Q_B = U_B I_B \sin \varphi_B = 127 \cdot 5,76 \cdot 0,707 = 517VAr$$

$$Q_C = U_C I_C \sin \varphi_C = 127 \cdot 4,02 \cdot 0,949 = 484VAr$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = 0 + 517 + 484 = 1001 \text{VAR}$$

Jaudas koeficientu trīsfāžu sistēmai var aprēķināt nosakot leņķi φ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{1001}{1413} = 0,709; \quad \varphi = \operatorname{arctg} 0,709 = 35,34^\circ; \quad \cos \varphi = \cos 35,34^\circ = 0,82$$

Ja aprēķina trīsfāžu sistēmas pilno jaudu,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1413^2 + 1001^2} = 1731 \text{VA},$$

tad jaudas koeficientu var noteikt pavisam vienkārši,

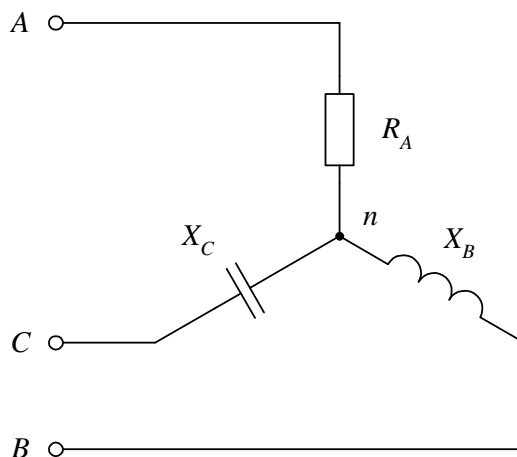
$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1413}{1731} = 0,82$$

5.2.2. Trīsfāžu zvaigznes slēgums bez neitrāles vada

Piemērs

Aprēķināt shēmai fāzes un līnijas strāvas, aktīvo jaudu, reaktīvo jaudu katrai fāzei atsevišķi un visai sistēmai. Noteikt jaudas koeficientu $\cos \varphi$. Konstruēt topogrāfisko vektoru diagrammu.

Dots: $U_L = 127 \text{V}$ $R_A = 4 \Omega$ $X_B = 4 \Omega$ $X_C = 9 \Omega$



5.9.att. Shēma

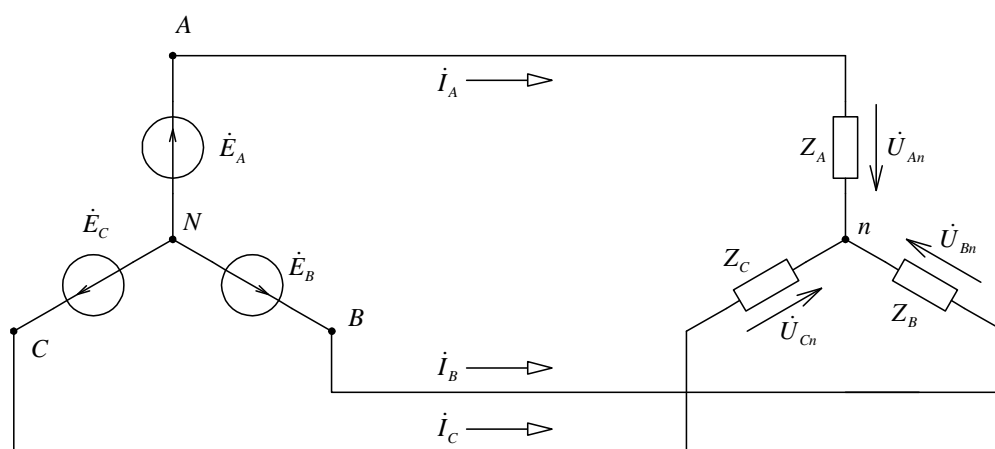
Dota trīsfāžu nesimetriska slodze zvaigznes slēgumā bez neitrāles vada, šai gadījumā, aprēķini jāveic ar simbolisko metodi. Lai noskaidrotu neitrāles nobīdes spriegumu, jālieto divu mezglu potenciālu metodi kompleksajā formā.

Izveidojam aprēķinu shēmu un nosakām fāžu kompleksās pretestību vērtības,

$$Z_A = R_A = 4\Omega; \quad Z_B = jX_B = j4\Omega; \quad Z_C = -jX_C = -j9\Omega.$$

Aprēķinām fāžu kompleksās vadītspējas,

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{4}; \quad Y_B = \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{j4}; \quad Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-j9}$$



5.10.att. Aprēķinu shēma

Ģenerators EDS ir vienāds ar fāzes spriegumu. No dotā līnijas sprieguma izsakām fāzes spriegumu,

$$E = U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{127}{\sqrt{3}} = 73,32V$$

Uzrakstām visus EDS eksponenciālā formā, pēc tam pārveidojam algebriskā formā,

$$\dot{E}_A = 73,32V$$

$$\dot{E}_B = 73,32e^{-j120^\circ} = 73,32[\cos(-120^\circ) + j\sin(-120^\circ)] = -36,66 - j63,5$$

$$\dot{E}_C = 73,32e^{j120^\circ} = 73,32[\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ] = -36,66 + j63,5$$

Slodzes asimetrijas gadījumā veidojas sprieguma nobīde starp N un n mezglu punktiem, lai varētu aprēķināt fāžu strāvas, nepieciešams noskaidrot šo nobīdes spriegumu.

Aprēķinām mezglu komplekso nobīdes spriegumu \dot{U}_{nN} ,

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C};$$

Visprecīzāk un racionālāk nobīdes spriegumu aprēķināt, lietojot kompleksos skaitļus algebriskā formā, tos nepārveidojot, jo var tiešā veidā izmantot komplekso skaitļu aprēķināšanas funkciju (CPLX), kas ir pieejama skaitļošanas tehnikā.

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z_A} + \frac{\dot{E}_B}{Z_B} + \frac{\dot{E}_C}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}} = \frac{\frac{73,32}{4} + \frac{-36,66 - j63,5}{j4} + \frac{-36,66 + j63,5}{-j9}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{-j9}} = -22,71 + j7,75$$

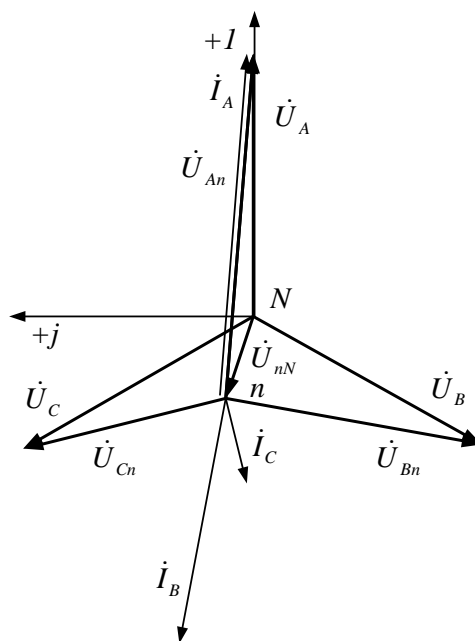
$$\dot{U}_{nN} = -22,71 + j7,75 = 24e^{j161,16^\circ} \text{ V}$$

Aprēķinām kompleksos fāžu spriegumus slodzei,

$$\dot{U}_{An} = \dot{E}_A - \dot{U}_{nN} = 73,32 + 22,71 - j7,75 = 96,03 - j7,75 = 96,34e^{-j4,61^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{Bn} = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN} = -36,66 - j63,5 + 22,71 - j7,75 = -13,95 - j71,25 = 72,60e^{-j101,08^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{U}_{Cn} = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN} = -36,66 + j63,5 + 22,71 - j7,75 = -13,95 + j55,75 = 57,47e^{j104,05^\circ} \text{ V}$$



5.11.att. Topogrāfiskā vektoru diagramma

Tagad zināmi spriegumi uz fāžu pretestībām, varam aprēķināt kompleksās fāžu strāvas,

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{An}}{Z_A} = \frac{96,03 - j7,75}{4} = 24,01 - j1,94 = 24,09e^{-j4,61^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{Bn}}{Z_B} = \frac{-13,95 - j71,25}{j4} = -17,81 + j3,49 = 18,15e^{j168,92^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{Cn}}{Z_C} = \frac{-13,95 + j55,75}{-j9} = -6,19 - j1,55 = 6,38e^{-j165,95^\circ} \text{ A}$$

Komplekso strāvu moduli ir attiecīgi fāžu strāvu efektīvās vērtības,

$$I_A = \sqrt{\text{Re}^2(\dot{I}_A) + \text{Im}^2(\dot{I}_A)} = \sqrt{24,01^2 + (-1,94)^2} = 24,09 \text{ A}$$

$$I_B = \sqrt{\text{Re}^2(\dot{I}_B) + \text{Im}^2(\dot{I}_B)} = \sqrt{(-17,81)^2 + 3,49^2} = 18,15 \text{ A}$$

$$I_C = \sqrt{\text{Re}^2(\dot{I}_C) + \text{Im}^2(\dot{I}_C)} = \sqrt{(-6,19)^2 + (-1,55)^2} = 6,38 \text{ A}$$

Aprēķinām patērētāja katras fāzes un kopējo trīsfāžu sistēmas patērēto pilno komplekso jaudu,

$$S_A = \dot{U}_{An} I_A^* = (96,03 - j7,75)(24,01 + j1,94) = 2320,7 \text{ VA}$$

$$S_B = \dot{U}_{Bn} I_B^* = (-13,95 - j71,25)(-17,81 - j3,49) = j1317,7 \text{ VA}$$

$$S_C = \dot{U}_{Cn} I_C^* = (-13,95 + j55,75)(-6,19 + j1,55) = -j366,7 \text{ VA}$$

$$S = S_A + S_B + S_C = 2320,7 + j1317,7 - j366,7 = 2320,7 + j951 = 2508e^{j22,28^\circ} \text{ VA}$$

Aktīvā jauda P ir kompleksās jaudas reālā daļa,

$$P_A = \text{Re}[\dot{U}_{An} I_A^*] = \text{Re}[(96,03 - j7,75)(24,01 + j1,94)] = 2320,7 \text{ W}$$

$$P_B = \text{Re}[\dot{U}_{Bn} I_B^*] = \text{Re}[(-13,95 - j71,25)(-17,81 - j3,49)] = 0 \text{ W}$$

$$P_C = \text{Re}[\dot{U}_{Cn} I_C^*] = \text{Re}[(-13,95 + j55,75)(-6,19 + j1,55)] = 0 \text{ W}$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 2320,7 + 0 + 0 = 2320,7 \text{ W}$$

Reaktīvā jauda Q ir kompleksās jaudas imaginārā daļa,

$$Q_A = \text{Im}[\dot{U}_{An} I_A^*] = \text{Im}[(96,03 - j7,75)(24,01 + j1,94)] = 0 \text{ VAR}$$

$$Q_B = \text{Im}[\dot{U}_{Bn} I_B^*] = \text{Im}[(-13,95 - j71,25)(-17,81 - j3,49)] = 1317,7 \text{ VAR}$$

$$Q_C = \text{Im}[\dot{U}_{Cn} I_C^*] = \text{Im}[(-13,95 + j55,75)(-6,19 + j1,55)] = -366,7 \text{ VAR}$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = 0 + 1317,7 - 366,7 = 951 \text{ VAR}$$

Jaudas koeficients,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{951}{2320} = 0,41$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,41 = 22,29^\circ$$

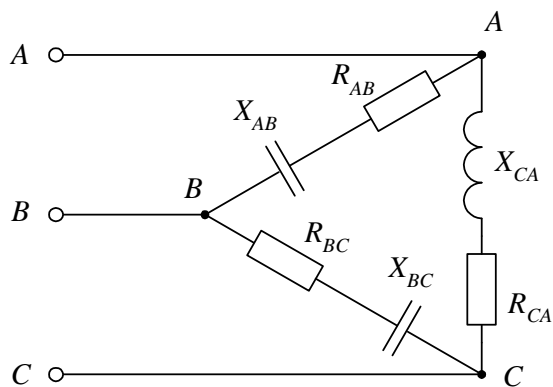
$$\cos \varphi = \cos 22,29^\circ = 0,92$$

5.2.3. Trīsfāžu trīsstūra slēgums

Piemērs

Aprēķināt shēmai fāzes un līnijas strāvas, aktīvo jaudu, reaktīvo jaudu katrai fāzei atsevišķi un visai sistēmai. Noteikt jaudas koeficientu $\cos \varphi$. Konstruēt topogrāfisko vektoru diagrammu.

Dots:	$U_L = 127V$	$R_{AB} = 8\Omega$	$R_{BC} = 8\Omega$	$R_{CA} = 8\Omega$
		$X_{AB} = 6\Omega$	$X_{BC} = 6\Omega$	$X_{CA} = 6\Omega$



5.12.att. Shēma

Izveidojam aprēķinu shēmu,

Aprēķinām fāžu kompleksās pretestības,

$$Z_{AB} = R_{AB} - jX_{AB} = 8 - j6$$

$$Z_{BC} = R_{BC} - jX_{BC} = 8 - j6$$

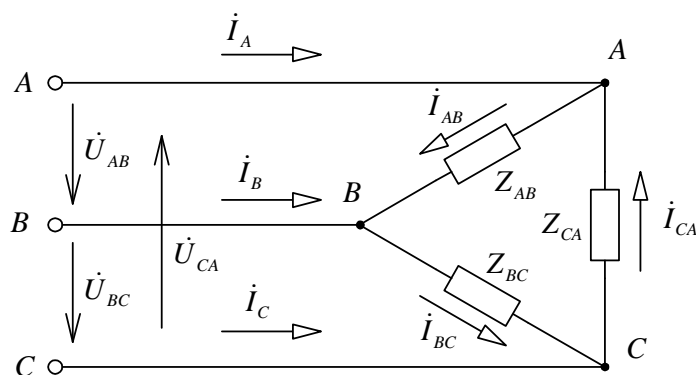
$$Z_{CA} = R_{CA} + jX_{CA} = 8 + j6$$

Fāzu spriegumi ir vienādi ar līniju spriegumiem, izsakām tos kompleksā formā,

$$\dot{U}_{AB} = 127V$$

$$\dot{U}_{BC} = 127e^{-j120^\circ} = (-63,5 - j110)V$$

$$\dot{U}_{CA} = 127e^{j120^\circ} = (-63,5 + j110)V$$



5.13.att. Aprēķinu shēma

Aprēķinām kompleksās fāžu strāvas,

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{127}{8 - j6} = 10,16 + j7,62 = 12,7e^{j36,87^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{-63,5 - j110}{8 - j6} = 1,52 - j12,61 = 12,7e^{-j83,13^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{-63,5 + j110}{8 + j6} = 1,52 + j12,61 = 12,7e^{j83,13^\circ} \text{ A}$$

Aprēķinām kompleksās līnijas strāvas,

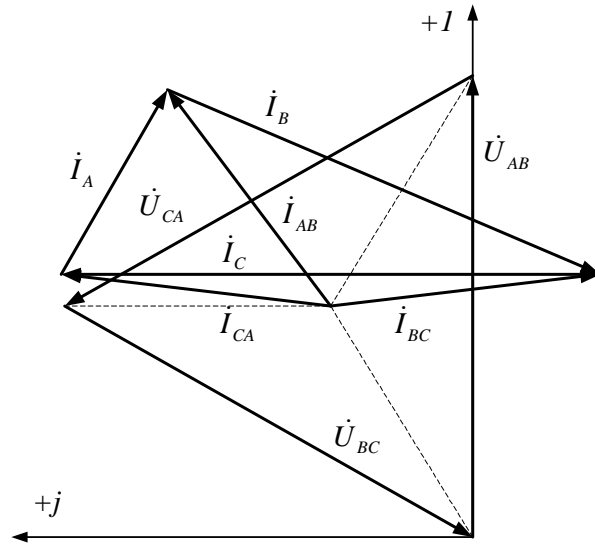
$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 10,16 + j7,62 - 1,52 - j12,61 = 8,64 - j4,99 = 9,98e^{-j30,01^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 1,52 - j12,61 - 10,16 - j7,62 = -8,64 - j20,23 = 22,00e^{-j113,13^\circ} \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 1,52 + j12,61 - 1,52 + j12,61 = 0 + j25,22 = 25,22e^{j90^\circ} \text{ A}$$

Pārbaudām, vai strāvas izrēķinātas pareizi,

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 8,64 - j4,99 - 8,64 - j20,23 + 0 + j25,22 = 0$$



5.14.att. Trīsstūra slēguma topogrāfiskā vektoru diagramma

Aprēķinām kompleksās jaudas izmantojot fāzes spriegumu un fāzes strāvu. Pilno jaudu var aprēķināt,

$$S_{AB} = \dot{U}_{AB} I_{AB}^* = 127 \cdot 12,7 e^{-j36,87^\circ} = 1612,9 e^{-j36,87^\circ} \text{ VA}$$

$$S_{BC} = \dot{U}_{BC} I_{BC}^* = 127 e^{-j120^\circ} \cdot 12,7 e^{j83,13^\circ} = 1612,9 e^{-j36,87^\circ} \text{ VA}$$

$$S_{CA} = \dot{U}_{CA} I_{CA}^* = 127 e^{j120^\circ} \cdot 12,7 e^{-j83,13^\circ} = 1612,9 e^{j36,87^\circ} \text{ VA}$$

Aktīvo fāžu jaudu var aprēķināt,

$$P_{AB} = \text{Re}[\dot{U}_{AB} I_{AB}^*] = \text{Re}[127 \cdot 12,7 e^{-j36,87^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \cos(-36,87^\circ) = 1290 \text{ W}$$

$$P_{BC} = \text{Re}[\dot{U}_{BC} I_{BC}^*] = \text{Re}[127 e^{-j120^\circ} \cdot 12,7 e^{j83,13^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \cos(-36,87^\circ) = 1290 \text{ W}$$

$$P_{CA} = \text{Re}[\dot{U}_{CA} I_{CA}^*] = \text{Re}[127 e^{j120^\circ} \cdot 12,7 e^{-j83,13^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \cos(36,87^\circ) = 1290 \text{ W}$$

Aprēķinām visas sistēmas aktīvo jaudu,

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 1290 + 1290 + 1290 = 3870 \text{ W}$$

Reaktīvo fāžu jaudu var aprēķināt,

$$Q_{AB} = \text{Im}[\dot{U}_{AB} I_{AB}^*] = \text{Im}[127 \cdot 12,7 e^{-j36,87^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \sin(-36,87^\circ) = -967,7 \text{ VAr}$$

$$Q_{BC} = \text{Im}[\dot{U}_{BC} I_{BC}^*] = \text{Im}[127 e^{-j120^\circ} \cdot 12,7 e^{j83,13^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \sin(-36,87^\circ) = -967,7 \text{ VAr}$$

$$Q_{CA} = \text{Im}[\dot{U}_{CA} I_{CA}^*] = \text{Im}[127 e^{j120^\circ} \cdot 12,7 e^{-j83,13^\circ}] = 127 \cdot 12,7 \cdot \sin(36,87^\circ) = 967,7 \text{ VAr}$$

Aprēķinām visas sistēmas reaktīvo jaudu,

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = -967,7 - 967,7 + 967,7 = -967,7 \text{VAR}$$

Aprēķinām visas sistēmas pilno jaudu,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3870^2 + (-967,7)^2} = 3989 \text{VA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{3870}{3989} = 0,97$$

Jaudas aprēķinos var izmantot līnijas spriegumus un strāvas. Šai gadījumā, aprēķinos būs jāizmanto Arona shēma, vai divu vatmetru mērīšanas princips. Izmantojot šo aprēķinu, jāizprot mērīšanas princips un pareizi jāizvēlas spriegumu virzieni.

Iedomāti sadalīsim trīsfāžu patērētāju divās daļās, viena daļa, kas darbojas starp fāzēm A un C, otra daļa, kas darbojas starp fāzēm B un C. Par kopējo vadu pieņemsim C fāzes vadu.

Aprēķinos izmantosim spriegumus,

$$\dot{U}_{AC} = -\dot{U}_{CA} = -127e^{j120^\circ} \text{V}$$

$$\dot{U}_{BC} = 127e^{-j120^\circ} \text{V}$$

Aprēķinām pilno jaudu,

$$S_1 = \dot{U}_{BC} I_B^* = 127e^{-j120^\circ} \cdot 22,00e^{j113,13^\circ} = 2794e^{-j6,87^\circ} = 2773 - j334$$

$$S_2 = \dot{U}_{AC} I_A^* = -127e^{j120^\circ} \cdot 9,98e^{j30,01^\circ} = 1267e^{-j30^\circ} = 1097 - j634$$

$$S = S_1 + S_2 = 2774 - j334 + 1098 - j634 = 3870 - j968 = 3989e^{-j14^\circ} \text{VA}$$

Aprēķinām aktīvo jaudu,

$$P_1 = \text{Re}[\dot{U}_{BC} I_B^*] = \text{Re}[127e^{-j120^\circ} \cdot 22,00e^{j113,13^\circ}] = 2794 \cos(-6,87^\circ) = 2773 \text{W}$$

$$P_2 = \text{Re}[\dot{U}_{AC} I_A^*] = \text{Re}[-127e^{j120^\circ} \cdot 9,98e^{j30,01^\circ}] = 1267 \cos(-30^\circ) = 1097 \text{W}$$

$$P = P_1 + P_2 = 2774 + 1098 = 3870 \text{W}$$

Aprēķinām reaktīvo jaudu,

$$Q_1 = \text{Im}[\dot{U}_{BC} I_B^*] = \text{Im}[127e^{-j120^\circ} \cdot 22,00e^{j113,13^\circ}] = 2794 \sin(-6,87^\circ) = -334 \text{VAR}$$

$$Q_2 = [\dot{U}_{AC} I_A^*] = [-127e^{j120^\circ} \cdot 9,98e^{j30,01^\circ}] = 1267 \sin(-30^\circ) = -634 \text{VAR}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = -334 - 634 = -968 \text{VAR}$$

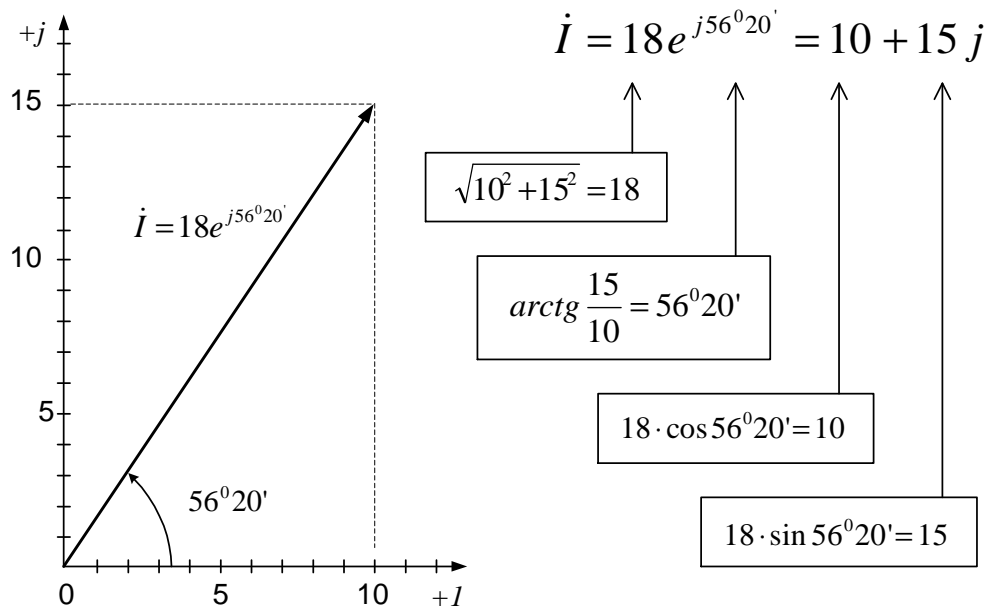
5.3. Kompleksie skaitļi elektrisko ķēžu aprēķinos

5.3.1. Kompleksais skaitlis

Mainstrāvas ķēžu analītiskajiem aprēķiniem izdevīgākā ir *simboliskā metode*, tā pamatojas uz kompleksu skaitļu simbolu izmantošanu aprēķinos.

Kompleksais skaitlis apraksta vektoriālu lielumu, to var uzrakstīt,

- algebriskā $\dot{I} = a + jb$,
- trigonometriskā $\dot{I} = I(\cos \psi + j \sin \psi)$,
- eksponenciālā $\dot{I} = Ie^{j\psi}$,
- polārā $\dot{I} = I \angle \psi$ formā.



5.15.att. Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija

Algebriskajā pierakstā a ir vektora projekcija uz reālo skaitļu asi $+I$, b projekcija uz imagināro skaitļu asi $+j$. Šīs vektora projekcijas veido taisnleņķa trīsstūri, kur a ir piekatete un b pretkatete, hipotenūza ir vektors. Imaginārā vienība j norāda, ka

projekcija b ir nobīdīta fāzē par 90° attiecībā pret a projekciju, kas sakrīt ar reālo skaitļu asi $+I$.

$$\boxed{-j = e^{-j90^\circ}} \quad \boxed{j = e^{j90^\circ}} \quad \boxed{j = \sqrt{-1}} \quad \boxed{j^2 = -1} \quad \boxed{e^{j180^\circ} = -1}$$

Eksponenciālajā un polārajā pierakstā I ir kompleksā lieluma moduļa vērtība $I = |\dot{I}|$, tas ir vektora garums, vektora virzienu uzdod ar leņķi ψ .

5.3.2. Komplekso skaitļu saskaitīšana un atņemšana

Piemērs

Saskaitām strāvas \dot{I}_1 un \dot{I}_2 .

Dots: $\dot{I}_1 = 10 + 15j$ $\dot{I}_2 = -5 + 5j$

Analītiskajos aprēķinos kompleksos skaitļus saskaitīt un atņemt var tikai algebriskā formā.

$$\dot{I}_{12} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (10 + 15j) + (-5 + 5j) = 5 + 20j$$

Piemērs

Saskaitām strāvas \dot{I}_3 un \dot{I}_4 , kas dotas eksponenciālā formā.

Dots: $\dot{I}_3 = 10e^{j25^\circ}$ $\dot{I}_4 = 8e^{j60^\circ}$

Ja kompleksie skaitļi doti eksponenciālā formā, tad pirms saskaitīšanas tie jāpārveido algebriskā formā.

$$\dot{I}_3 = 10e^{j25^\circ} = 10 \cos 25^\circ + j10 \sin 25^\circ = 9,06 + j4,23$$

$$\dot{I}_4 = 8e^{j60^\circ} = 8 \cos 60^\circ + j8 \sin 60^\circ = 4 + j6,92$$

$$\dot{I}_{34} = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 9,06 + j4,23 + 4 + j6,92 = 13,06 + j11,15$$

Pārveidojam strāvu \dot{I}_{34} no algebriskās formas uz eksponenciālo.

$$\dot{I}_{34} = 13,06 + j11,15 = \sqrt{13,06^2 + 11,15^2} \cdot e^{j\left(\arctg \frac{11,15}{13,06}\right)} = 17,17e^{j40^\circ 48'}$$

5.3.3. Komplekso skaitļu reizināšana un dalīšana

Kompleksos skaitļus var reizināt un dalīt gan algebriskā, gan eksponenciālā formā.

Reizinot kompleksos skaitļus eksponenciālā formā, skaitļa moduļa daļu sareizina vienu ar otru, bet nobīdes leņķus summē, kā pakāpes rādītājus. Summējot leņķus ņem vērā zīmi.

Piemērs

Reizinām kompleksus lielumus \dot{E} un I^* .

Dots:
$$\dot{E} = 10e^{j25^\circ} \qquad I^* = 8e^{j40^\circ}$$

$$S = \dot{E} \cdot I^* = 10e^{j25^\circ} \cdot 8e^{j40^\circ} = 80e^{j65^\circ}$$

Piemērs

Reizinām kompleksos skaitļus ar dažādas zīmes nobīdes leņķiem.

Dots:
$$\dot{I}_1 = 5e^{-j30^\circ} \qquad Z_1 = 4e^{j10^\circ}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot Z_1 = 5e^{-j30^\circ} \cdot 4e^{j10^\circ} = 20e^{-j20^\circ}$$

Piemērs

Reizinām kompleksos skaitļus \dot{I}_2 un Z_2 algebriskā formā.

Dots:
$$\dot{I}_2 = -5 + 5j \qquad Z_2 = 10 + 15j$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{I}_2 \cdot Z_2 = (-5 + 5j) \cdot (10 + 15j) = \\ &= -50 + 50j - 75j + 75j^2 = -125 - 25j \end{aligned}$$

Ja aprēķinos iegūstam j^2 , tad to varam aizstāt ar -1, jo $j^2 = -1$.

Ja aprēķinu rezultāts ir ar „-” zīmi, tas nozīmē, ka vektora virziens ir pretējs, tas ir pagriezts par 180° , $e^{j180^\circ} = -1$

Piemērs

$$\dot{U} = -125 - 25j = -(125 + 25j) = e^{j180^\circ} \cdot (125 + 25j)$$

Šajā gadījumā, ja skaitli $-125 - 25j$ pārveido eksponenciālā formā, aprēķinu gaitā var pazaudēt „-” zīmi un iegūt kļūdainu rezultātu, kur vektora virziens atšķiras par

$$180^\circ, \text{ jo matemātiski } \operatorname{arctg} \frac{-25}{-125} = \operatorname{arctg} \frac{25}{125}.$$

Piemērs

Dalām kompleksos skaitļus.

$$\text{Dots: } \dot{I}_1 = 5e^{-j30^\circ} \quad \dot{U}_1 = 20e^{-j20^\circ}$$

Dalot eksponenciālus kompleksos skaitļus, $e^{j\psi}$ kāpinātājus summē, saucēja kāpinātāja $j\psi$ zīmi maina uz pretējo. Komplekso skaitļu moduļa vērtības daļa kā parastus skaitļus.

$$Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{20e^{-j20^\circ}}{5e^{-j30^\circ}} = 4e^{j10^\circ}$$

Aprēķinām Z_1 apgriezto lielumu.

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{4e^{j10^\circ}} = 0,25e^{-j10^\circ}$$

5.3.4. Komplekso skaitļu aprēķins ar kalkulatoru

Inženiertehniskajiem un zinātniskajiem kalkulatoriem parasti ir funkcija *CPLX*, tas ir komplekso skaitļu aprēķinu darba režīms, kuru ļoti ērti var izmantot elektrotehniskajos aprēķinos. Iepazīstieties ar sava kalkulatora lietošanas instrukciju. Ja kalkulatoram ir funkcijas $P \rightarrow R$ un $R \rightarrow P$, vai $\Theta \rightarrow xy$ un $xy \rightarrow \Theta$, tad ir iespējams tieša veidā pārrēķināt kompleksos skaitļus no polārās (*polar*) formas uz algebrisko (*rectangular* – taisnleņķa) un otrādi.

Piemērs

Dots kompleksais skaitlis algebriskā formā,

$$\dot{A} = a + jb = 10 - j5.$$

Pārveidot skaitli eksponenciālā formā.

Pirms sākam aprēķinus, skaitļotājam iestatām leņķa mērvienību grādus DEG. Lai pārveidotu doto skaitli eksponenciālā formā, jāveic sekojošas darbības, reģistrā *a* jāieraksta 10, reģistrā *b* jāieraksta - 5 un jāizpilda pārveidošanas funkcija no taisnleņķa sistēmas uz polāro, to dara šādi,

10	<i>a</i>	5	-/+	<i>b</i>	2 funkc	<i>R</i> → <i>P</i>
----	----------	---	-----	----------	---------	---------------------

Rezultātu nolasa, nospiežot taustiņu *a*, uz ekrāna parādās skaitļa \dot{A} moduļa vērtība 11,18 (taisnleņķa trīsstūra hipotenūza), nospiežot taustiņu *b*, parādās leņķis $-26,56^\circ$, (leņķis starp piekateti un hipotenūzu).

$$\dot{A} = 10 - j5 = 11,18e^{-j26,56^\circ}$$

Lai pārveidotu komplekso skaitli no eksponenciālas formas uz algebrisko, reģistrā *a* jāieraksta skaitlis 11,18, reģistrā *b* skaitlis - 26,56 un jāizpilda pārveidošanas funkcija no polārās sistēmas uz taisnleņķa, to dara šādi,

11,18	<i>a</i>	26,56 ^o	-/+	<i>b</i>	2 funkc	<i>P</i> → <i>R</i>
-------	----------	--------------------	-----	----------	---------	---------------------

Rezultātu nolasa, nospiežot taustiņu *a*, uz ekrāna parādās skaitļa \dot{A} reālā komponente 10, nospiežot taustiņu *b*, parādās imaginārā komponente - 5.

$$\dot{A} = 11,18e^{-j26,56^\circ} = a + jb = 10 - j5$$

Lai saskaitītu, atņemt, reizinātu un dalītu kompleksos skaitļus kalkulatoram ir jāieslēdz *CPLX* darba režīms. Visērtāk izpildīt darbības ar kompleksajiem skaitļiem algebriskā formā, ja ir vajadzība pāriet uz eksponenciālo skaitļa formu, to var izdarīt nospiežot pogas **2 funkc**, tad **R → P**. Skaitļu ievadīšana *a* un *b* reģistrā un rezultātu nolasišana notiek tāpat kā iepriekšējā piemērā.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учеб. Пособие для вузов. – 4-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 440 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: -5-е изд. перераб. – М.: Высшая школа, 1967. -775 с.
3. Соколов Б.П., Соколов В.Б. Электротехника и основы электроники: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. – М.: Выш.шк., 1985. – 128 с.
4. Lielturks A. Teorētiskā elektrotehnika un radiotehnika: Otrās pārstrādātais izdevums. –R.: Zvaigzne, 1970. -168 lpp.
5. Priednieks Ē. Elektriskās ķēdes un to vienādojumi.- R.: RTU, 1999. -101 lpp.
6. Briedis J., Dūmiņš I., Lasis U., Ratnieks U., Tabaks K. Elektrotehnikas teorētiskie pamati. Stacionāri procesi lineārās ķēdēs: 2. izdevums, pārstrādāts. – R.: Zvaigzne ABC, 1999. – 302 lpp.
7. Прянишников В.Ф. Теоретические основы электротехники: Курс лекций. – 4-е изд.- СПб.: КОРОНА принт, 2004.- 368 с.
8. Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов; Под ред. В.П.Бакалова. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Радио и связь, 2003. – 592 с.
9. Купфмюллер К. Основы теоретической электротехники: Перевод с немецкого И.И.Кодкина под редакцией проф. В.Ю.Ломоносова.-М.: Государственное Энергетическое Издательство, 1960.-464 с.
10. Taber M., Silgalis E. Electric Circuit Analysis.-Boston.:Houghton Mifflin Company, 1980.- 610 p.